

Chapitre I - Matrices à coefficients dans un corps

La notion de matrice, à n lignes et p colonnes, à coefficients dans un corps commutatif K , est essentielle en algèbre linéaire. Dans le cas où $n = p$, on définira l'anneau $\mathbb{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K . Le calcul de la puissance d'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ intervient dans de nombreuses situations. On en présentera deux applications, l'une concernant les suites récurrentes linéaires et l'autre la notion combinatoire de graphe orienté simple. On décrira par ailleurs une méthode due à Gauss permettant de décider si une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ est inversible, et si tel est le cas, de calculer son inverse. Comme conséquence de cette méthode, on disposera d'un procédé de résolution de certains systèmes d'équations linéaires, appelés systèmes de Cramer. On évoquera à la fin la notion de déterminant, qui sera reprise en détails dans le chapitre III.

Table des matières

1. Matrices - Généralités	1
2. Puissances d'une matrice - Applications	6
3. Matrices inversibles	12
4. Systèmes de Cramer	18
5. Introduction à la notion de déterminant	21

1. Matrices - Généralités

Dans toute la suite, la lettre K désigne un corps commutatif.

1. Définition

Définition 1. Soient n et p des entiers naturels. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K , toute famille d'éléments de K indexée par l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.¹

Une matrice M se note souvent

$$M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$$

¹ Soient I et E des ensembles. Rappelons qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexée par I est une application de I à valeurs dans E , celle qui à i associe x_i . Si I est vide, il s'agit de l'unique application $\emptyset \rightarrow E$, dont le graphe est vide. En particulier, cette définition a un sens pour $n = 0$ ou $p = 0$.

où a_{ij} est l'image de (i, j) dans K . Lorsque l'ensemble d'indices ne prête pas à confusion, on notera plus simplement

$$M = (a_{ij}).$$

La terminologie utilisée se justifie par le fait que l'on représente M par un tableau rectangulaire, ayant n lignes et p colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

en convenant que a_{ij} est l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne. Cette présentation a été introduite par Arthur Cayley (1821-1895) vers le milieu du XIX^e siècle.

Notation. On désignera par $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K . Si $n = p$, on le notera $\mathbb{M}_n(K)$. On dit parfois que $\mathbb{M}_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K .

Définition 2. Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.

- 1) Les coefficients a_{ii} sont appelés les éléments diagonaux de M .
- 2) On appelle trace de M , notée $\text{Tr}(M)$, la somme de ses éléments diagonaux.
- 3) On dit que M est une matrice diagonale si pour tous i et j distincts, on a $a_{ij} = 0$.
- 4) On dit que M est une matrice triangulaire supérieure si pour tous i et j tels que $i > j$, on a $a_{ij} = 0$.
- 5) On dit que M est une matrice triangulaire inférieure si pour tous i et j tels que $j > i$, on a $a_{ij} = 0$.

Notation. On notera I_n la matrice diagonale de $\mathbb{M}_n(K)$ dont tous les éléments diagonaux valent 1, où 1 est l'élément neutre multiplicatif de K . Elle s'appelle la matrice identité d'ordre n .

2. Opérations sur les matrices

Définition 3 (Addition - Multiplication par un scalaire).

- 1) L'addition dans $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ est l'application

$$\mathbb{M}_{n,p}(K) \times \mathbb{M}_{n,p}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{n,p}(K)$$

qui à toutes matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ associe la matrice

$$A + B \in \mathbb{M}_{n,p}(K),$$

dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est $a_{ij} + b_{ij}$.

2) L'opération de multiplication par un scalaire est l'application

$$K \times \mathbb{M}_{n,p}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{n,p}(K)$$

qui à $\lambda \in K$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$ associe la matrice

$$\lambda A \in \mathbb{M}_{n,p}(K),$$

dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est λa_{ij} .

Afin de définir la multiplication de deux matrices, la situation est moins simple. On ne peut pas multiplier entre elles deux matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ sauf si $n = p$. Plus précisément :

Définition 4 (Produit matriciel). Le produit matriciel est défini pour tous les entiers naturels n, p, q , par l'application

$$\mathbb{M}_{n,p}(K) \times \mathbb{M}_{p,q}(K) \rightarrow \mathbb{M}_{n,q}(K)$$

qui à tout couple $(A, B) \in \mathbb{M}_{n,p}(K) \times \mathbb{M}_{p,q}(K)$ associe la matrice

$$C = AB \in \mathbb{M}_{n,q}(K),$$

telle que, en posant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq q}}$, on ait

$$(1) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

On retiendra que le produit AB n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Exemple 5. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

On vérifie que l'on a

$$AB = \begin{pmatrix} 30 & -53 & 60 & 23 \\ -4 & 9 & -44 & -20 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,4}(\mathbb{R}).$$

Lemme 6. Soient A, B des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$ et λ un élément de K .

1) On a $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$.

2) On a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration : Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. La trace de $A + B$ est la somme des $a_{ii} + b_{ii}$ et la trace de λA est la somme des λa_{ii} , d'où l'assertion 1. Par ailleurs, on a

$$AB = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \text{et} \quad BA = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}.$$

On en déduit que l'on a

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} \right) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki} \right),$$

d'où l'égalité annoncée.

Définition 7 (Transposée). Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On appelle matrice transposée de A , et on note tA , la matrice de $\mathbb{M}_{p,n}(K)$ dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est a_{ji} .

Lemme 8. 1) Pour tous $A, B \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, on a

$$(2) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \quad \text{et} \quad {}^t({}^tA) = A.$$

2) Pour tous $A \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{p,q}(K)$, on a dans $\mathbb{M}_{q,n}(K)$ l'égalité

$$(3) \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

3) Si $n = p$, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tA)$.

Démonstration : Les assertions 1 et 3 résultent directement des définitions. Par ailleurs, posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. D'après (1), les éléments de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de ${}^t(AB)$ et ${}^tB {}^tA$ sont égaux à

$$\sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki},$$

d'où l'égalité (3).

Définition 9. On dit qu'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ est symétrique si elle égale à sa transposée.

3. L'anneau $\mathbb{M}_n(K)$

Proposition 10. *Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{M}_n(K)$ muni de l'addition, et de la multiplication définie par l'égalité (1), est un anneau.*

Démonstration : Le fait que $(\mathbb{M}_n(K), +)$ soit un groupe commutatif résulte directement des définitions : l'élément neutre est la matrice nulle i.e. la matrice dont tous les termes sont nuls, et l'opposé de la matrice (a_{ij}) est $(-a_{ij})$.

Vérifions que la multiplication est associative. Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$. Soient i et j des entiers compris entre 1 et n . L'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de la matrice $A(BC)$ et celui de la matrice $(AB)C$ sont respectivement

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{r=1}^n b_{kr} c_{rj} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \right) c_{kj}.$$

Ils sont égaux à

$$\sum_{(u,v) \in [1,n] \times [1,n]} a_{iu} b_{uv} c_{vj},$$

d'où l'assertion. L'élément neutre multiplicatif de $\mathbb{M}_n(K)$ est la matrice I_n . La propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est laissée en exercice.

Remarque 11. Pour tout $n \geq 2$, l'anneau $\mathbb{M}_n(K)$ n'est pas commutatif. En effet, soit x un élément de K distinct de 1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(K)$ la matrice définie par

$$a_{11} = x, \quad a_{22} = 1 \quad \text{et} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } (i, j) \text{ distinct de } (1, 1) \text{ et } (2, 2).$$

Soit $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(K)$ la matrice définie par

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 1, \quad b_{22} = 1 \quad \text{et} \quad b_{ij} = 0 \text{ pour tous les autres termes de } B.$$

On vérifie que l'on a $AB \neq BA$. Les anneaux $\mathbb{M}_n(K)$ ont été les premiers exemples connus d'anneaux non commutatifs.

Rappelons qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(K)$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathbb{M}_n(K)$ tel que l'on ait

$$AB = BA = I_n.$$

Remarque 12. Pour tout $n \geq 2$, l'anneau $\mathbb{M}_n(K)$ n'est pas un corps, autrement dit il existe des matrices non nulles de $\mathbb{M}_n(K)$ qui ne sont pas inversibles. Tel est le cas de la matrice (a_{ij}) définie par $a_{11} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \neq (1, 1)$.

Comme il est indiqué dans le chapitre zéro, un élément d'un anneau non commutatif peut être inversible à droite sans l'être à gauche, auquel cas il n'est pas inversible. En ce qui concerne l'anneau $\mathbb{M}_n(K)$, on établira dans le chapitre II l'énoncé essentiel suivant.

Théorème 13. *Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) A est inversible.
- 2) Il existe B dans $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $AB = I_n$ (A est inversible à droite).
- 3) Il existe C dans $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $CA = I_n$ (A est inversible à gauche).

2. Puissances d'une matrice - Applications

1. Définition

Soient n, k des entiers naturels et A_1, \dots, A_k des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$. On définit le composé de A_1, \dots, A_k par la formule de récurrence

$$A_1 A_2 \cdots A_k = (A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) A_k.$$

Définition 14. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{M}_n(K)$, la puissance k -ième de A est la matrice*

$$A^k = A \cdots A \quad (k \text{ facteurs}).$$

D'après la définition d'un produit vide, on a

$$A^0 = I_n.$$

Remarque 15. Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq k$, on a l'égalité

$$A_1 \cdots A_k = (A_1 \cdots A_p)(A_{p+1} \cdots A_k).$$

En effet, elle est vraie si $k = 0$. Supposons qu'elle le soit pour un produit de $k - 1$ matrices où $k \geq 1$. Posons $A = A_1 \cdots A_k$. Soit p un entier compris entre 1 et k . L'égalité à prouver est vraie si $p = k$. Supposons $p \leq k - 1$. On a $A = (A_1 \cdots A_{k-1}) A_k$. L'hypothèse de récurrence implique $A = ((A_1 \cdots A_p)(A_{p+1} \cdots A_{k-1})) A_k$. D'après la propriété d'associativité, on obtient $A = (A_1 \cdots A_p)((A_{p+1} \cdots A_{k-1}) A_k)$, d'où l'égalité annoncée.

Indiquons une méthode de calcul des puissances d'une matrice dans le cas où $n = 2$.

2. Méthode de division euclidienne

Soient A une matrice de $\mathbb{M}_2(K)$ et k un entier naturel. On dispose d'un moyen de calcul de A^k reposant sur le lemme suivant.

Lemme 16. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K)$, on a

$$M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0.$$

Démonstration : On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

et l'on constate que

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'assertion.

Voici comment on peut procéder pour calculer A^k . Soit $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K . Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \in K[X].$$

Supposons pour simplifier K contenu dans \mathbb{C} . Effectuons la division euclidienne de X^k par F . Il existe Q dans $K[X]$ et α_k, β_k dans K tels que l'on ait

$$X^k = FQ + \alpha_k X + \beta_k.$$

Les racines de F dans \mathbb{C} sont

$$u = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad v = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{où} \quad \Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc).$$

1) Si on a $\Delta \neq 0$ i.e. $u \neq v$, en substituant X respectivement par u et v , on obtient

$$u^k = \alpha_k u + \beta_k \quad \text{et} \quad v^k = \alpha_k v + \beta_k.$$

Par ailleurs, on a $(FQ)(A) = F(A)Q(A) = 0$ (lemme 16), d'où l'égalité

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k I_2.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ainsi

$$(4) \quad A^k = \left(\frac{u^k - v^k}{u - v} \right) A + \left(\frac{uv^k - vu^k}{u - v} \right) I_2.$$

2) Si $\Delta = 0$, on a $F = (X - u)^2$. En utilisant les égalités $F(u) = F'(u) = 0$, on vérifie alors que pour tout $k \geq 1$, on a

$$(5) \quad A^k = (ku^{k-1})A + u^k(1 - k)I_2.$$

Exemples 17.

1) Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. On a $F(A) = 0$ avec

$$F = X^2 - 4X - 11.$$

Ses racines sont $u = 2 + \sqrt{15}$ et $v = 2 - \sqrt{15}$, d'où le calcul de A^k avec l'égalité (4). À titre indicatif, on trouve

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2577 & 6335 \\ 1810 & 4387 \end{pmatrix}$$

(exercice : retrouver cette égalité avec la définition).

2) Prenons $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. On a $F(A) = 0$ avec

$$F = (X - 7)(X + 6).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc

$$A^k = \left(\frac{7^k - (-6)^k}{13} \right) A + \left(\frac{7 \cdot (-6)^k + 6 \cdot 7^k}{13} \right) I_2.$$

On décrira dans le dernier chapitre du cours une méthode permettant de déterminer les puissances de certaines matrices de $\mathbb{M}_n(K)$, celles dites diagonalisables, dont voici la définition.

Définition 18 (Matrices diagonalisables). Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. On dit que A est diagonalisable s'il existe dans $\mathbb{M}_n(K)$ une matrice inversible P et une matrice diagonale D , telles que l'on ait

$$A = P^{-1}DP.$$

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathbb{M}_n(K)$. En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^k = P^{-1}D^kP.$$

Posons $D = (d_{ij})$. On a $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La matrice D^k est diagonale et ses éléments diagonaux sont $d_{11}^k, \dots, d_{nn}^k$. Connaissant D et P , on obtient ainsi A^k .

3. Applications

On va décrire ici deux situations dans lesquelles le calcul de la puissance d'une matrice intervient. La première concerne les suites récurrentes linéaires et la seconde la notion de graphe orienté.

3.1. Suites récurrentes linéaires

Soient p un entier ≥ 1 et a_0, \dots, a_{p-1} des éléments de K fixés. Il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K définie par ses p premiers termes u_0, \dots, u_{p-1} et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Une telle suite s'appelle une suite récurrente linéaire d'ordre p . On s'intéresse au problème d'explicitier le terme général u_n .²

Exemple 19. Considérons la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation

$$u_{n+2} = -2u_n + 3u_{n+1}.$$

On constate que $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$. Cela suggère que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_n = 2^n - 1,$$

ce que l'on vérifie par récurrence (on peut aussi utiliser la formule ci-dessous).

Reformulons ce problème en termes du calcul des puissances d'une certaine matrice de $\mathbb{M}_p(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{p,1}(K) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_p(K).$$

² Si $p = 1$, on a $u_n = a_0^n u_0$. Si $p = 2$, on peut aussi expliciter simplement u_n . En effet, posons dans $K[X]$

$$f = X^2 - a_1 X - a_0,$$

et supposons pour simplifier que f a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans K . On a alors

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}.$$

On peut établir cette assertion par récurrence. On obtient λ et μ en résolvant le système d'équations $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$. Ce procédé se généralise à tout entier p en utilisant la théorie des espaces vectoriels. Elle permet de comprendre pourquoi il existe de telles formules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$U_{n+1} = AU_n,$$

d'où l'égalité

$$(6) \quad U_n = A^n U_0.$$

Le calcul de A^n , ce qui est toute la difficulté, permet ainsi de connaître u_n .

Exemple 20. Retrouvons le résultat obtenu dans l'exemple 19. Il s'agit pour cela de calculer la puissance n -ième de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K).$$

Calculons A^n par la méthode de division euclidienne. On vérifie que l'on a $F(A) = 0$ avec $F = (X - 1)(X - 2)$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q \in K[X]$ et α_n, β_n dans K tels que l'on ait

$$X^n = FQ + \alpha_n X + \beta_n.$$

En substituant respectivement X par 1 et 2, on constate que l'on a

$$\alpha_n = 2^n - 1 \quad \text{et} \quad \beta_n = 2 - 2^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ implique

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de (6), on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, d'où $u_n = 2^n - 1$ comme attendu.

3.2. Graphes orientés simples

Un graphe orienté simple G est la donnée d'un ensemble fini X , dont les éléments sont appelés sommets, et d'une partie A du produit cartésien $X \times X$, dont les éléments sont appelés arcs. On note souvent $G = (X, A)$. Si $a = (x, y)$ est un arc, on dit que x est l'extrémité initiale de a et que y est l'extrémité finale de a , d'où la notion d'orientation. Si $x = y$, on dit que a est une boucle. Un chemin de G , de longueur k , est une suite de sommets $(x_{i_0}, \dots, x_{i_k})$, non nécessairement distincts, telle que pour tout $r = 0, \dots, k - 1$, $(x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$ soit un arc. L'entier k est le nombre d'arcs « parcourus » pour aller de x_{i_0} à x_{i_k} .

Posons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Par définition, la matrice d'adjacence de G est la matrice

$$M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

dont les coefficients sont

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 21. *Pour tout $k \geq 1$, le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de la matrice M^k est le nombre de chemins de longueur k reliant x_i à x_j .*

Démonstration : Par définition, l'énoncé est vrai si $k = 1$. Soit k un entier ≥ 2 tel que le résultat soit vrai pour l'entier $k - 1$. Notons $m_{ij}^{(k)}$ le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de M^k . De l'égalité $M^k = M^{k-1}M$, on déduit que l'on a pour tous i et j

$$m_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^n m_{i\ell}^{(k-1)} m_{\ell j}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $m_{i\ell}^{(k-1)}$ est le nombre de chemins de longueur $k - 1$ reliant x_i à x_ℓ . Par ailleurs, on a $m_{\ell j} = 1$ si (x_ℓ, x_j) est un arc de G et $m_{\ell j} = 0$ sinon. Il en résulte que $m_{i\ell}^{(k-1)} m_{\ell j}$ est le nombre de chemins de longueur k reliant x_i à x_j dont le dernier arc est (x_ℓ, x_j) . La somme de ces termes est donc le nombre de chemins de longueur k reliant x_i à x_j , d'où le résultat.

Exemple 22. Soit $G = (X, A)$ le graphe orienté défini par $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et

$$A = \{(x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_2), (x_4, x_4), (x_5, x_1), (x_5, x_3)\}.$$

La matrice d'adjacence de G est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R}).$$

On vérifie par exemple que l'on a

$$M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc trois chemins de longueur 6 reliant x_4 à x_1 . On peut le vérifier aussi directement. Soient u le nombre de chemins pour aller de x_4 à x_4 et v celui pour aller de x_1 à x_5 . On a $u + 2v + 2 = 6$, d'où $u + 2v = 4$. On obtient les trois solutions $(u, v) = (0, 2), (2, 1), (4, 0)$.

3. Matrices inversibles

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. On s'intéresse ici aux deux questions suivantes.

- 1) Comment décider si A est inversible ou non ?
- 2) Si A est inversible, comment déterminer son inverse ?

On va décrire une méthode, due à Gauss, permettant de répondre à ces questions.

1. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Définition 23. Soit M une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On appelle opération élémentaire sur les lignes L_i de M chacune des transformations suivantes :

- 1) pour tous i et j distincts, l'échange de L_i et L_j , que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- 2) Pour tout $\lambda \in K$ non nul, le remplacement de L_i par λL_i . On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Cette opération s'appelle une dilatation de L_i .
- 3) Pour tous i et j distincts, et tout $\lambda \in K$ non nul, le remplacement de L_i par $L_i + \lambda L_j$. On la note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Cette opération s'appelle une transvection de L_i .

Compte tenu de nos objectifs, supposons désormais $n = p$. Considérons une matrice

$$M \in \mathbb{M}_n(K).$$

On va démontrer que toute matrice déduite de M par des opérations élémentaires sur ses lignes s'obtient en multipliant à gauche M par une matrice inversible convenable. Désignons par m_{ij} le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de M .

Notation. Pour tous i et j entre 1 et n , on notera $E_{i,j}$ la matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Lemme 24. 1) On a l'égalité

$$(7) \quad M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{i,j}.$$

2) Pour tous i, j, k, ℓ entre 1 et n , on a

$$(8) \quad E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell},$$

où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

3) Pour tous i et j entre 1 et n , on a

$$E_{i,j}M = \sum_{\ell=1}^n m_{j\ell} E_{i,\ell}.$$

Autrement dit, $E_{i,j}M$ est la matrice dont la i -ème ligne est la j -ième ligne de M et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Démonstration : Les égalités (7) et (8) résultent directement des définitions. Par ailleurs, elles entraînent que l'on a

$$E_{i,j}M = \sum_{k,\ell} m_{k\ell} E_{i,j} E_{k,\ell} = \sum_{k,\ell} m_{k\ell} \delta_{jk} E_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^n m_{j\ell} E_{i,\ell}.$$

Notation. Pour tous i et j distincts et $\lambda \in K$ non nul, on posera dans $\mathbb{M}_n(K)$

$$S_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i},$$

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i},$$

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}.$$

Lemme 25. Pour tout $\lambda \in K$ non nul, $S_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles. On a

$$S_{i,j}^{-1} = S_{i,j}, \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1}) \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda).$$

Démonstration : Vérifions que $S_{i,j}^2 = I_n$. D'après la propriété de distributivité dans l'anneau $\mathbb{M}_n(K)$, on a

$$S_{i,j}^2 = S_{i,j} - E_{i,i}S_{i,j} - E_{j,j}S_{i,j} + E_{i,j}S_{i,j} + E_{j,i}S_{i,j}.$$

On déduit de (8) les égalités (on a $i \neq j$)

$$E_{i,i}S_{i,j} = E_{i,j}, \quad E_{j,j}S_{i,j} = E_{j,i}, \quad E_{i,j}S_{i,j} = E_{i,i}, \quad E_{j,i}S_{i,j} = E_{j,j},$$

ce qui entraîne le résultat. La seconde égalité à établir résulte directement de la définition du produit matriciel. On a $E_{i,j}E_{i,j} = 0$, d'où $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)T_{i,j}(\lambda) = I_n$ et le lemme.

Lemme 26. Les matrices déduites de M par les opérations

$$L_i \leftrightarrow L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i, \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j,$$

sont respectivement

$$S_{i,j}M, \quad D_i(\lambda)M, \quad T_{i,j}(\lambda)M.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la troisième assertion du lemme 24. En effet, on a

$$S_{i,j}M = M - E_{i,i}M - E_{j,j}M + E_{i,j}M + E_{j,i}M,$$

qui est donc la matrice déduite de M en échangeant L_i et L_j . Les deux autres assertions s'établissent de la même façon.

Terminologie. On dit que $S_{i,j}$ est une matrice d'échange, que $D_i(\lambda)$ est une matrice de dilatation et que $T_{i,j}(\lambda)$ est une matrice de transvection. On les appellera matrices élémentaires.

2. Matrices triangulaires inversibles

Lemme 27. *Une matrice triangulaire supérieure de $\mathbb{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.*

Démonstration : Soit T une matrice triangulaire supérieure. Supposons que ses éléments diagonaux soient tous non nuls. On a $T = D + N$, où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de T et où N est triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont nuls. D'après l'hypothèse faite, D est inversible. On a donc

$$T = D(I_n + D^{-1}N).$$

La matrice $D^{-1}N$ est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont nuls. On vérifie que l'on a

$$(D^{-1}N)^n = 0.^3$$

³ Justifions cette égalité. Considérons pour cela une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathbb{M}_n(K)$ telle que pour tout (i, j) on ait $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$. Vérifions que l'on a $A^n = 0$. Pour tout k compris entre 1 et n , notons $a_{ij}^{(k)}$ le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de A^k . Il s'agit de montrer que l'on a

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{si} \quad j \leq i + k - 1.$$

On procède par récurrence. Par hypothèse, cette égalité est vraie si $k = 1$. Supposons qu'elle le soit pour un entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$. On a

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}.$$

L'inégalité $j \leq i + k - 1$ entraîne que l'on a $\ell \leq i + k - 1$ ou bien $j \leq \ell$. D'après l'hypothèse

On en déduit les égalités

$$I_n = I_n - (-D^{-1}N)^n = (I_n + D^{-1}N) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{-1}N)^k \right).$$

Il en résulte que T est inversible, d'inverse

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (D^{-1}N)^k \right) D^{-1}.$$

Réciproquement, supposons T inversible, d'inverse A . Posons $T = (t_{ij})$ et $A = (a_{ij})$. On vérifie alors que pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $a_{jj}t_{jj} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $i > j$. En particulier, les éléments diagonaux de T sont tous non nuls, d'où le résultat.

3. La méthode de Gauss

Elle repose sur l'énoncé suivant.

Théorème 28. *Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *A est inversible.*
- 2) *Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A , transformant A en une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale n'est formée que de 1.*

Démonstration : 1) Supposons A inversible et démontrons la seconde condition. Procédons par récurrence sur n . Le résultat est vrai si $n = 1$, car A étant par hypothèse inversible, on a $A = (\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$, d'où $(\frac{1}{\lambda})A = (1)$. Supposons $n \geq 2$ et le résultat vrai pour l'entier $n-1$. Parce que A est inversible, sa première colonne est non nulle. Quitte à échanger deux lignes de A , puis à effectuer une dilatation convenable, on transforme A en une matrice $U = (u_{ij})$ telle que $u_{11} = 1$. Notons encore L_i ses lignes. Pour tous les entiers $k \geq 2$ tels que $u_{k1} \neq 0$, en effectuant l'opération de transvection

$$L_k \leftarrow L_k - u_{k1}L_1,$$

on obtient une matrice $V = (v_{ij})$ telle que pour tout $k \geq 2$, on ait

$$v_{11} = 1 \quad \text{et} \quad v_{k1} = 0.$$

La matrice A étant inversible, on déduit alors des lemmes 25 et 26 que V l'est aussi. Soit $V' \in \mathbb{M}_{n-1}(K)$ la matrice déduite de V en supprimant sa première ligne et sa première

de récurrence, on a $a_{i\ell}^{(k)} = 0$ si $\ell \leq i + k - 1$. Par ailleurs, on a $a_{\ell j} = 0$ si $j \leq \ell$. On a donc $a_{ij}^{(k+1)} = 0$, d'où le résultat.

colonne. Elle est inversible, d'inverse celle obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de V^{-1} . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une suite d'opérations élémentaires effectuées sur les lignes de V' transformant V' en une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale. Puisque $v_{k1} = 0$ pour tout $k \geq 2$, ces mêmes opérations élémentaires effectuées sur les lignes de V transforment V en une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ ayant la forme souhaitée, d'où la seconde condition.

2) Inversement, supposons la seconde condition satisfaite. Il existe $C \in \mathbb{M}_n(K)$, qui est un produit de matrices élémentaires, telle que CA soit une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale n'est formée que de 1 (lemme 26). D'après le lemme 27, CA est inversible, donc il existe $P \in \mathbb{M}_n(K)$ inversible tel que l'on ait $P(CA) = I_n$. On obtient $(PC)A = I_n$. Le produit de deux matrices inversibles étant inversible, tel est le cas de PC . On en déduit que A est inversible, d'inverse PC , d'où le résultat.

De la même façon, on établit l'énoncé suivant :

Théorème 29. *Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *A est inversible.*
- 2) *Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A , transformant A en la matrice I_n .*

Démonstration : Supposons A inversible. Quitte à multiplier à gauche A par un produit de matrices élémentaires, on peut supposer que A est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale n'est formée que de 1 (th. 28). En effectuant des opérations de transvections convenables, on se ramène au cas où la première ligne de A est $(1 \ 0 \ \cdots \ 0)$. Comme dans la démonstration précédente, on en déduit la seconde condition en considérant la matrice déduite de A en supprimant sa première ligne et sa première colonne. Inversement, supposons qu'il existe un produit de matrices élémentaires $C \in \mathbb{M}_n(K)$ tel que $CA = I_n$. Parce que C est inversible, on a $A = C^{-1}$. Il en résulte que A est inversible, d'inverse C .

Remarques 30.

1) On peut définir la notion d'opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice M . Les définitions sont les mêmes. On aboutit à des énoncés analogues aux théorèmes 28 et 29, à ceci près qu'une matrice déduite de M par une opération élémentaire sur ses colonnes s'obtient en multipliant à droite M par une matrice élémentaire (et pas à gauche).

2) On déduit du théorème 29 que toute matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$ est un produit de matrices élémentaires. En effet, si $A \in \mathbb{M}_n(K)$ est inversible, il existe un produit C de matrices élémentaires de $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $CA = I_n$. L'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire, d'où notre assertion.

La matrice A étant donnée, si elle est inversible, sans le savoir a priori, la démonstration du théorème 28 fournit un moyen pratique de trouver une matrice triangulaire supérieure A' , dont la diagonale n'est formée que de 1, qui se déduit de A par des opérations élémentaires sur ses lignes. Cela établit alors le fait que A est inversible. En effectuant ensuite des opérations élémentaires sur les lignes de A' , on peut déterminer l'inverse de A (dém. du th. 29).

Par ailleurs, une démonstration analogue à celle du théorème 28 entraîne l'existence d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A , transformant A en une matrice triangulaire supérieure T . Si l'un des coefficients diagonaux de T est nul, alors A n'est pas inversible. En effet, il existe un produit de matrices élémentaires C tel que $CA = T$. La matrice C est inversible et T ne l'est pas (lemme 27). Un produit de matrices inversibles étant inversible, cela entraîne l'assertion.

Exemple 31. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

Montrons que A est inversible et déterminons son inverse. On notera pour cela L_i les lignes de A , ainsi que celles des matrices déduites de A après chaque opération élémentaire sur les lignes. Conformément à la démonstration du théorème 28, on effectue la suite d'opérations élémentaires suivante.

$$\begin{aligned} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 & : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 & : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2 & : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 & : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \\ L_3 \leftarrow \frac{8}{7}L_3 & : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit à ce stade que A est inversible (th. 28). Déterminons son inverse. On effectue pour cela les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 & : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + \frac{7}{8}L_3 & : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3 & : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

Il s'agit alors de déterminer la matrice $C \in \mathbb{M}_3(K)$ correspondant à cette suite d'opérations élémentaires ayant transformé A en I_3 i.e. telle que $CA = I_3$. En utilisant le lemme 26, les huit opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A correspondent respectivement aux matrices

$$\begin{aligned} T_{2,1}(-5) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_{3,1}(-2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_2\left(-\frac{1}{8}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{3,2}(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & D_3\left(\frac{8}{7}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix}, & T_{1,2}(-3) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{1,3}\left(\frac{7}{8}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_{2,3}\left(-\frac{5}{8}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$A^{-1} = C = T_{2,3}\left(-\frac{5}{8}\right)T_{1,3}\left(\frac{7}{8}\right)T_{1,2}(-3)D_3\left(\frac{8}{7}\right)T_{3,2}(3)D_2\left(-\frac{1}{8}\right)T_{3,1}(-2)T_{2,1}(-5),$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{pmatrix}.$$

4. Systèmes de Cramer

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{M}_{n,1}(K)$. Il existe $X \in \mathbb{M}_{n,1}(K)$ unique tel que l'on ait $AX = B$, à savoir

$$X = A^{-1}B.$$

En d'autres termes, il existe un unique élément $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que l'on ait

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = b_1, \quad \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j = b_2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j = b_n.$$

On dit souvent que (9) est un système de Cramer. Afin de déterminer X , il suffit de calculer A^{-1} . En fait, il suffit seulement de transformer A en une matrice triangulaire supérieure,

dont les coefficients diagonaux valent 1, avec des opérations élémentaires sur ses lignes. En effet, il existe un produit C de matrices élémentaires tel que

$$A' = CA$$

soit de cette forme (th. 28). Posons $B' = CB$. Parce que C est inversible, pour tout $X \in \mathbb{M}_{n,1}(K)$ on a l'équivalence

$$AX = B \Leftrightarrow A'X = B'.$$

On est ainsi ramené à résoudre l'équation $A'X = B'$. Notons $A' = (a'_{ij})$ et $B' = (b'_i)$. Pour tout $i = n, n-1, \dots, 1$, on a alors, dans cet ordre,

$$(10) \quad x_i = b'_i - \sum_{i < j \leq n} a'_{ij} x_j.$$

Le calcul de C est inutile pour déterminer B' . On vérifie en effet que les matrices colonnes déduites de $B = (b_k)$ en échangeant b_i et b_j , en remplaçant b_i par λb_i et en remplaçant b_i par $b_i + \lambda b_j$, sont respectivement $S_{i,j}B$, $D_i(\lambda)B$ et $T_{i,j}(\lambda)B$. Ainsi, B' est la matrice déduite de B par la même suite d'opérations élémentaires que celle effectuée sur A .

Exemple 32. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

Démontrons que A est inversible et trouvons la solution de l'équation $AX = B$, autrement dit du système linéaire (9) correspondant. On notera pour cela L_i les lignes de A , ainsi que celles des matrices déduites de A après chaque opération élémentaire sur les lignes. Conformément à la démonstration du théorème 28, on effectue la suite d'opérations élémentaires suivante.

$$L_1 \leftrightarrow L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -19 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -19 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 19L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -37 & 50 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -37 & 50 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{37}L_3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{37} \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{37} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{37} \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow -\frac{37}{15}L_4 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela établit le fait que A est inversible. Par ailleurs, on vérifie que la matrice colonne déduite de B par les mêmes opérations élémentaires que celles de A est

$$B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{21}{37} \\ -\frac{46}{5} \end{pmatrix}.$$

La solution $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ cherchée est donc (formule (10))

$$x_1 = -\frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{13}{5}, \quad x_3 = -13, \quad x_4 = -\frac{46}{5},$$

autrement dit, on a

$$AX = B \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

À titre indicatif, la matrice $C \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ correspondant à cette suite d'opérations élémentaires est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{19}{37} & \frac{5}{37} & -\frac{1}{37} & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{17}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{37}{15} \end{pmatrix},$$

et l'on a comme attendu

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{50}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Introduction à la notion de déterminant

On définira dans le chapitre III la notion de déterminant d'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. C'est un élément de K . On obtiendra une application

$$\det : \mathbb{M}_n(K) \rightarrow K$$

telle que pour tous A, B dans $\mathbb{M}_n(K)$, les conditions suivantes soient remplies :

$$(11) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B),$$

$$(12) \quad \det(A) \neq 0 \iff A \text{ est inversible.}$$

On constatera que l'on a

$$\det(I_n) = 1.$$

Si A est inversible, le fait que l'on ait $\det(A) \neq 0$ est ainsi une conséquence directe de (11). On a dans ce cas

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

On se limite ici, pour des raisons techniques, à définir cette notion dans le cas où $n \leq 3$. Cela permettra, dans ce cas particulier, de disposer sans attendre d'une autre méthode très simple pour décider si une matrice est inversible, et s'il en est ainsi de calculer son inverse.

1. Cas où $n = 0$

La seule matrice de $\mathbb{M}_0(K)$ est la matrice vide. Par définition, son déterminant vaut 1.

2. Cas où $n = 1$

Soient M une matrice de $\mathbb{M}_1(K)$ et a son coefficient.

Définition 33. *Le déterminant de M est a .*

Les conditions (11) et (12) sont satisfaites. Si a n'est pas nul, on a $M^{-1} = (a^{-1})$.

3. Cas où $n = 2$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbb{M}_2(K)$.

Définition 34. *Le déterminant de M est $ad - bc$.*

Justifions cette définition, en vérifiant que les conditions (11) et (12) sont satisfaites. Posons $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on a

$$MM' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix}.$$

L'égalité $\det(MM') = \det(M)\det(M')$ provient alors de la relation

$$(aa' + bc')(b'c + dd') - (a'c + c'd)(ab' + bd') = (ad - bc)(a'd' - b'c').$$

En ce qui concerne (12) :

Lemme 35. *La matrice M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Supposons M inversible. Il existe alors x, y, z, t dans K tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

autrement dit tels que

$$ax + bz = 1, \quad cx + dz = 0, \quad ay + bt = 0, \quad cy + dt = 1.$$

On a $(bc - ad)z = c$ et $(ad - bc)t = a$. Cela implique $ad - bc \neq 0$, sinon $a = c = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite. Inversement, si $ad - bc \neq 0$, on vérifie directement que la matrice indiquée dans l'énoncé (que l'on obtient en résolvant le système ci-dessus) est l'inverse de M .

4. Cas où $n = 3$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbb{M}_3(K)$.

Définition 36. *Le déterminant de M est*

$$\det(M) = aei + cdh + gbf - (gec + bdi + ahf).$$

Cette formule, contrairement à son apparence, est assez simple à retenir. On considère le produit des éléments diagonaux aei , puis les deux autres produits cdh et gbf qui lui sont en quelque sorte «symétriques» dans le tableau, et on effectue leur somme. On fait

de même avec le produit ceg issu de l'autre diagonale et les termes dbi , ahf en oubliant pas le signe moins (règle de Sarrus).

On peut aussi remarquer que l'on a (développement suivant la première colonne de M)

$$\det(M) = a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix},$$

ou encore que l'on a (développement suivant la première ligne de M)

$$\det(M) = a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Avec la définition du produit matriciel, on constate que la condition (11) est satisfaite. Justifions que (12) l'est aussi. Soit $N \in \mathbb{M}_3(K)$ la matrice dont le terme de i -ème ligne et de la j -ième colonne est $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice de $\mathbb{M}_2(K)$ déduite de M en supprimant sa i -ème ligne et sa j -ième colonne. On a

$$N = \begin{pmatrix} ei - fh & gf - id & hd - eg \\ hc - ib & ai - gc & bg - ah \\ bf - ec & dc - af & ae - bd \end{pmatrix}.$$

La matrice N s'appelle la comatrice de M et se note souvent $\text{com}(M)$. On vérifie l'énoncé suivant (exercice) :

Lemme 37. *On a les égalités*

$$M^t N = {}^t N M = \det(M) I_3.$$

Corollaire 38. *La matrice M est inversible si et seulement si on a $\det(M) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t N.$$

Exemple 39. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

On a $\det(M) = 81$, en particulier M est inversible. Par ailleurs, on a

$$\text{com}(M) = \begin{pmatrix} 9 & 27 & -9 \\ -13 & -3 & 22 \\ 1 & -6 & 17 \end{pmatrix},$$

d'où (cor. 38)

$$M^{-1} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 9 & -13 & 1 \\ 27 & -3 & -6 \\ -9 & 22 & 17 \end{pmatrix}.$$