

## Chapitre IV - Réduction des endomorphismes

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur un corps commutatif  $K$ . La théorie de la réduction consiste à trouver, si possible, une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  soit d'une forme très simple, dans le cas le plus favorable soit diagonale, ou à défaut, triangulaire. Étant donnée une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(K)$ , la version matricielle de ce problème est de trouver, si possible, une matrice semblable à  $A$  qui soit diagonale ou triangulaire. Cela est très utile dans de nombreuses situations, aussi bien en algèbre qu'en analyse. On l'a vu par exemple, en ce qui concerne le calcul des puissances d'une matrice.

### Table des matières

1. Vecteurs propres, valeurs propres et sous-espaces propres	1
2. Somme de sous-espaces propres	3
3. Polynôme caractéristique	5
4. Polynôme minimal	9
5. Endomorphismes diagonalisables	12
6. Endomorphismes trigonalisables	18
7. Théorème de Cayley-Hamilton	20

### 1. Vecteurs propres, valeurs propres et sous-espaces propres

Dans toute la suite,  $E$  désigne  $K$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

**Définition 1 (Vecteurs propres).** *On appelle vecteur propre de  $f$  tout vecteur non nul  $x$  de  $E$  tel que  $f(x)$  soit proportionnel à  $x$ .*

Si  $x$  est un vecteur propre de  $f$ , tout vecteur non nul de la droite de  $E$  engendrée par  $x$  est aussi un vecteur propre de  $f$ .

**Définition 2 (Valeurs propres).** *Soit  $\lambda$  un élément de  $K$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur non nul  $x$  de  $E$  tel que l'on ait*

$$f(x) = \lambda x.$$

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  s'appelle le spectre de  $f$ . On le notera  $\text{Sp}(f)$ . Un vecteur non nul  $x$  de  $E$  pour lequel il existe  $\lambda \in K$  tel que  $f(x) = \lambda x$ , est un vecteur propre de  $f$ . On dit qu'il est associé à la valeur propre  $\lambda$ . Compte tenu de la définition :

**Lemme 3.** *Soit  $\lambda$  un élément de  $K$ . Pour que  $\lambda$  soit une valeur propre de  $f$  il faut et il suffit que le noyau de  $\lambda \text{Id}_E - f$  ne soit pas nul.*

**Définition 4 (Sous-espaces propres).** *Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Le noyau de  $\lambda \text{Id}_E - f$  s'appelle le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$ .*

Le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$  est la réunion de  $\{0\}$  et de l'ensemble (non vide) formé des vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda$ .

**Lemme 5.** *Supposons  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Soit  $\lambda$  un élément de  $K$ . Pour que  $\lambda$  soit une valeur propre de  $f$  il faut et il suffit que le déterminant de  $\lambda \text{Id}_E - f$  soit nul.*

Démonstration : Parce que  $E$  est de dimension finie l'endomorphisme  $\lambda \text{Id}_E - f$  est bijectif si et seulement il est injectif, d'où l'assertion (Chap. III, cor. 41).

### Exemples 6.

1) Supposons  $E = K = \mathbb{R}$ . Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait  $f(x) = \lambda x$ . On a  $\text{Sp}(f) = \{\lambda\}$  et  $\mathbb{R}$  est le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$ .

2) Prenons  $K = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^2$  et  $f$  l'endomorphisme représenté dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour que  $\lambda \in \mathbb{R}$  soit valeur propre de  $f$  il faut et il suffit que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

soit nul, autrement dit que l'on ait  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ . Le polynôme  $X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$  n'ayant pas de racines dans  $\mathbb{R}$ , le spectre de  $f$  est vide.

3) Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie, alors  $f$  a au moins une valeur propre. En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  le déterminant de  $\lambda \text{Id}_E - f$  est  $P(\lambda)$  où  $P$  est dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $P$  a au moins une racine dans  $\mathbb{C}$  (le corps  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos).

4) Si  $E = \mathbb{R}^n$ , avec  $n$  impair, alors  $f$  a au moins une valeur propre, car un polynôme  $\mathbb{R}[X]$  de degré impair a au moins une racine dans  $\mathbb{R}$  (cf. le th. des valeurs intermédiaires, ou le fait que si  $z \in \mathbb{C}$  est une racine d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , son conjugué  $\bar{z}$  l'est aussi).

5) Si  $E = K[X]$  et  $f(P) = XP$  pour tout  $P \in E$ , alors  $\text{Sp}(f)$  est vide.

6) Soient  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f$  l'endomorphisme de dérivation. On a  $\text{Sp}(f) = \mathbb{R}$ . En effet, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction qui à  $x$  associe  $\exp(\lambda x)$  est un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda$ .

## 2. Somme de sous-espaces propres

Commençons par généraliser la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels (Chap. II, déf. 16).

**Définition 7 (Somme de sous-espaces - Somme directe).** Soient  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Le sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé somme des  $E_i$  et noté

$$\sum_{i=1}^p E_i,$$

est l'ensemble des éléments de la forme

$$x_1 + \dots + x_p \quad \text{où} \quad x_i \in E_i.$$

On dit que cette somme est directe si tout élément de la somme des  $E_i$  s'écrit de façon unique  $x_1 + \dots + x_p$  avec  $x_i \in E_i$ .

**Remarque 8.** La somme des  $E_i$  est directe si et seulement l'application linéaire

$$\psi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow E$$

définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i,$$

est injective. Dans ce cas,  $\psi$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel produit des  $E_i$  sur la somme des  $E_i$ .

**Lemme 9.** Supposons  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Si la somme des  $E_i$  est directe, on a l'égalité

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim E_i.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la remarque précédente et de la formule (3) des exemples 54 du chapitre II.

**Lemme 10.** Soient  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . La somme des  $E_i$  est directe si et seulement si on a

$$(1) \quad E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, p.$$

Démonstration : La condition (1) est nécessaire par définition. Inversement, supposons qu'elle soit satisfaite. Soient  $x_1, \dots, x_p$  des éléments de  $E$  tels que  $x_k$  soit dans  $E_k$  et que  $x_1 + \dots + x_p = 0$ . Il s'agit de montrer que tous les  $x_k$  sont nuls (remarque 8). Supposons le contraire et considérons  $i$  le plus grand des indices  $k$  tels que  $x_k \neq 0$ . L'élément  $-x_i$ , qui est non nul, est alors la somme des  $x_j$  pour  $j = 1, \dots, i-1$ , d'où une contradiction.

**Proposition 11.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. La somme des sous-espaces propres de  $f$  associés aux  $\lambda_i$  est directe.*

Démonstration : Notons  $E(\lambda_i)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Vérifions la condition (1), autrement dit, que pour tout  $i = 1, \dots, p$ , on a la propriété

$$P(i) : E(\lambda_i) \cap \sum_{j=1}^{i-1} E(\lambda_j) = \{0\}.$$

Procédons par récurrence sur  $i$ . La condition  $P(1)$  est remplie (si  $i = 1$ , la somme des  $E(\lambda_j)$  est nulle par définition). Soit  $i$  un entier tel que  $2 \leq i \leq p$  et que  $P(1), \dots, P(i-1)$  soient vraies. Prouvons que  $P(i)$  l'est aussi. Soit  $x$  un élément appartenant à  $E(\lambda_i)$  et à la somme des  $E(\lambda_j)$  pour  $j = 1, \dots, i-1$ . Il s'agit de montrer que  $x$  est nul. On a une égalité de la forme

$$x = x_1 + \dots + x_{i-1} \quad \text{avec} \quad x_j \in E(\lambda_j).$$

On a  $f(x) = \lambda_i x$  et  $f(x_j) = \lambda_j x_j$ , d'où les égalités

$$\lambda_i x = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i x_j = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j x_j.$$

On obtient

$$\sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_j - \lambda_i) x_j = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, vu que les propriétés  $P(1), \dots, P(i-1)$  sont vraies, la somme des  $E(\lambda_j)$  pour  $j = 1, \dots, i-1$  est directe (lemme 10). Par suite, on a

$$(\lambda_j - \lambda_i) x_j = 0 \quad \text{pour tout} \quad j = 1, \dots, i-1.$$

Puisque  $\lambda_i$  est distinct de  $\lambda_j$ , les  $x_j$  sont nuls, d'où  $x = 0$  et le résultat.

**Corollaire 12.** *Supposons  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes et  $E(\lambda_i)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda_i$ . On a*

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p E(\lambda_i) \right) = \sum_{i=1}^p \dim E(\lambda_i).$$

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente et du lemme 9.

**Corollaire 13.** Soient  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs propres de  $f$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Alors,  $x_1, \dots, x_p$  sont linéairement indépendants.

Démonstration : Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  des scalaires de  $K$  tels que la somme des  $\alpha_i x_i$  soit nulle. Pour tous  $i$  et  $j$  distincts,  $\alpha_i x_i$  et  $\alpha_j x_j$  appartiennent à des sous-espaces propres distincts. Pour tout  $i$ , on a donc  $\alpha_i x_i = 0$  (prop. 11), d'où  $\alpha_i = 0$  et l'assertion.

### 3. Polynôme caractéristique

Supposons  $E$  de dimension finie  $n$  sur  $K$ .

#### 1. Définition

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Notons  $A$  la matrice qui représente  $f$  dans  $\mathcal{B}$ . Considérons la matrice

$$XI_n - A$$

à coefficients dans l'anneau commutatif  $K[X]$ , donc en particulier dans le corps des fractions rationnels  $K(X)$ , de sorte que la théorie des chapitres précédents s'applique.

**Lemme 14.** 1) Le déterminant de  $XI_n - A$  est un polynôme unitaire de  $K[X]$  de degré  $n$ .  
2) Soient  $\mathcal{B}'$  une base de  $E$  et  $A'$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ . On a

$$\det(XI_n - A) = \det(XI_n - A').$$

Démonstration : 1) Cela résulte de la définition du déterminant d'une matrice.

2) Soit  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , on a  $A' = P^{-1}AP$ , d'où les égalités

$$XI_n - A' = (P^{-1}XI_nP) - P^{-1}AP = P^{-1}(XI_n - A)P,$$

puis l'assertion.

Cela justifie la définition suivante :

**Définition 15.** On dit que le déterminant

$$\det(XI_n - A)$$

est le polynôme caractéristique de  $f$ .

**Notation.** On désignera par  $\chi_f$  le polynôme caractéristique de  $f$ .

Remarquons que si  $n = 0$ , on a  $\chi_f = 1$ .

**Lemme 16.** *Pour que  $\lambda \in K$  soit valeur propre de  $f$  il faut et il suffit que  $\chi_f(\lambda) = 0$ . En particulier,  $\text{Sp}(f)$  est fini.*

Démonstration : La matrice de l'endomorphisme  $\lambda \text{Id}_E - f$  est  $\lambda I_n - A$ , d'où l'assertion (lemme 5).

Précisons l'assertion 1 du lemme 14 en explicitant le coefficient de  $X^{n-1}$  et le terme constant de  $\chi_f$ . Rappelons que  $\text{Tr}(f)$  désigne la trace de  $f$  (Chap. II, déf. 90).

**Lemme 17.** *Dans  $K[X]$ , on a*

$$\chi_f = X^n - \text{Tr}(f) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f).$$

Démonstration : Les termes de degré  $n$  et  $n-1$  de  $\chi_f$  sont ceux du produit

$$\prod_{i=1}^n (X - a_i),$$

où  $a_i$  est l'élément de la  $i$ -ème ligne et de la  $i$ -ème colonne de  $A$ . Par ailleurs, en substituant  $X$  par 0 dans  $\chi_f$ , on obtient  $\det(-A)$ . On a

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n \det(f),$$

qui est donc le terme constant de  $\chi_f$ , d'où l'assertion.

**Corollaire 18.** *Supposons  $K = \mathbb{C}$ . Alors  $f$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comptées avec leurs multiplicités et on a*

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Démonstration : Tout polynôme de degré  $n$  dans  $\mathbb{C}[X]$  possède  $n$  racines comptées avec leurs multiplicités. On a donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

d'où le résultat (lemme 17).

**Définition 19.** *Soit  $M$  une matrice de  $\mathbb{M}_n(K)$ . On appelle polynôme caractéristique de  $M$ , le polynôme caractéristique de l'endomorphisme représenté par  $M$  dans la base canonique de  $K^n$ .*

Deux matrices semblables ont donc le même polynôme caractéristique.

Établissons quelques propriétés de  $\chi_f$ . Commençons par une digression concernant le déterminant des matrices par blocs, très utile en pratique.

## 2. Déterminant d'une matrice triangulaire de matrices

Soit  $L$  un corps commutatif.

**Proposition 20.** Soient  $p$  et  $q$  des entiers  $\geq 1$  et  $M$  une matrice de  $\mathbb{M}_{p+q}(L)$  de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où  $A \in \mathbb{M}_p(L)$ ,  $B \in \mathbb{M}_q(L)$ ,  $C \in \mathbb{M}_{p,q}(L)$  et où  $0 \in \mathbb{M}_{q,p}(L)$  est la matrice nulle. On a

$$\det M = (\det A)(\det B).$$

Démonstration : Posons  $n = p + q$ . Notons  $m_{i,j}$  le coefficient de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ième colonne de  $M$ . On a

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}.$$

Désignons par  $\text{Stab}_p$  le sous-ensemble de  $\mathbb{S}_n$  formé des bijections  $\sigma$  telles que

$$\sigma(\{1, \dots, p\}) = \{1, \dots, p\}.$$

Pour tout  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  qui n'est pas dans  $\text{Stab}_p$ , on a

$$\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i} = 0.$$

On a ainsi

$$\det M = \sum_{\sigma \in \text{Stab}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}.$$

Soit  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) le groupe des bijections de  $\{1, \dots, p\}$  (resp.  $\{p+1, \dots, n\}$ ). L'application

$$S_1 \times S_2 \rightarrow \text{Stab}_p$$

qui au couple  $(\alpha, \beta) \in S_1 \times S_2$  associe la permutation  $\sigma$  définie par

$$\sigma(i) = \alpha(i) \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad \sigma(i) = \beta(i) \quad \text{si} \quad p+1 \leq i \leq n,$$

est une bijection. De plus, en notant encore  $\varepsilon$  les morphismes signatures sur  $S_1$  et  $S_2$ , on a l'égalité

$$\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) = \varepsilon(\sigma).$$

Il en résulte que l'on a

$$\det M = \sum_{(\alpha, \beta) \in S_1 \times S_2} \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \prod_{i=1}^p m_{\alpha(i), i} \prod_{i=p+1}^n m_{\beta(i), i}.$$

On obtient

$$\det M = \left( \sum_{\alpha \in S_1} \varepsilon(\alpha) \prod_{i=1}^p m_{\alpha(i), i} \right) \left( \sum_{\beta \in S_2} \varepsilon(\beta) \prod_{i=p+1}^n m_{\beta(i), i} \right) = (\det A)(\det B).$$

### 3. Propriétés

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit stable par  $f$  si son image par  $f$  est contenue dans  $F$ .

**Proposition 21.** *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ . Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $F$ . Le polynôme  $\chi_g$  divise  $\chi_f$ .*

Démonstration : Posons  $p = \dim F$ . Choisissons une base  $e' = (e_1, \dots, e_p)$  de  $F$ . Complétons  $e'$  en une base  $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soient  $M$  la matrice de  $f$  dans  $e$  et  $M'$  celle de  $g$  dans  $e'$ . Puisque  $F$  est stable par  $f$ , il existe des matrices  $A \in \mathbb{M}_{p, n-p}(K)$  et  $B \in \mathbb{M}_{n-p}(K)$  telles que l'on ait

$$M = \begin{pmatrix} M' & A \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$XI_n - M = \begin{pmatrix} XI_p - M' & -A \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{pmatrix}.$$

On obtient dans  $K[X]$  l'égalité (prop. 20)

$$\chi_f = \det(XI_p - M') \det(XI_{n-p} - B).$$

On a  $\chi_g = \det(XI_p - M')$ , d'où le résultat.

Rappelons que pour tous  $\alpha \in K$  et  $P \in K[X]$ , il existe un unique entier  $h \geq 0$  tel que  $(X - \alpha)^h$  divise  $P$  et que  $(X - \alpha)^{h+1}$  ne divise pas  $P$ . On dit que  $h$  est l'ordre de multiplicité de  $\alpha$  relativement à  $P$ , ou plus simplement, que  $h$  est la multiplicité de  $\alpha$  relativement à



$P$ . Si  $h = 0$ , on a  $P(\alpha) \neq 0$ . Si  $h = 1$ , on dit  $\alpha$  est une racine simple de  $P$ . Généralement, quand on évoque la multiplicité d'une racine de  $P$ , il s'agit de celle relativement à  $P$ .

**Corollaire 22.** *Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Soient  $p$  la dimension du sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$  et  $m$  la multiplicité de  $\lambda$  relativement à  $\chi_f$ . On a*

$$1 \leq p \leq m.$$

Démonstration : Le sous-espace propre  $E(\lambda)$  associé à  $\lambda$  est stable par  $f$  et  $f$  agit sur  $E(\lambda)$  par l'homothétie de rapport  $\lambda$ . Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $f$  restreint à  $E(\lambda)$  est donc  $(X - \lambda)^p$ . Par suite, il divise  $\chi_f$ , d'où l'assertion.

**Remarques 23.**

- 1) Le sous-espace propre de  $f$  associé à une racine simple de  $\chi_f$  est de dimension 1.
- 2) Soient  $A$  et  $B$  des matrices de  $\mathbb{M}_n(K)$ . Les matrices  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique. En effet, on a les égalités

$$\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -XI_n \\ -I_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - XI_n & 0_n \\ * & -XI_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B & -XI_n \\ -I_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA - XI_n & * \\ 0_n & -XI_n \end{pmatrix}.$$

On a ainsi  $\det(AB - XI_n) = \det(BA - XI_n)$ .

#### 4. Polynôme minimal

Considérons la  $K$ -algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$  (c'est un anneau et un  $K$ -espace vectoriel). Posons

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f^k = f \circ f^{k-1} \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Pour tous  $p$  et  $q \in \mathbb{N}$  on a

$$(2) \quad f^p \circ f^q = f^q \circ f^p = f^{p+q}.$$

Pour tout  $P \in K[X]$ , en posant

$$P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \quad \text{avec} \quad N = \deg P,$$

on définit l'endomorphisme  $P(f)$  par l'égalité

$$P(f) = \sum_{k=0}^N a_k f^k.$$

On obtient ainsi une application

$$\varphi_f : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$$

telle que

$$\varphi_f(P) = P(f).$$

En utilisant (2), on montre que  $\varphi_f$  est un morphisme de  $K$ -algèbres i.e. un morphisme d'anneaux et une application  $K$ -linéaire. Pour tous  $P$  et  $Q$  dans  $K[X]$  et  $\alpha \in K$ , on a ainsi

$$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f), \quad (\alpha P)(f) = \alpha P(f), \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

L'image de  $\varphi_f$  est la sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$  engendrée par  $f$ . Son noyau  $\text{Ker } \varphi_f$  est un idéal de  $K[X]$ . S'il n'est pas nul,  $K[X]$  étant un anneau principal, il existe un unique polynôme unitaire  $\mu_f$  qui engendre  $\text{Ker } \varphi_f$  i.e. tel que

$$\text{Ker } \varphi_f = \left\{ \mu_f P \mid P \in K[X] \right\}.$$

**Définition 24.** Si  $\text{Ker}(\varphi_f)$  n'est pas nul, on dit que  $\mu_f$  est le polynôme minimal de  $f$ .

Remarquons que si  $E$  est nul, on a  $\mu_f = 1$ .

**Lemme 25.** Si  $E$  est de dimension finie sur  $K$ , alors  $f$  possède un polynôme minimal.

Démonstration : Notons  $n$  la dimension de  $E$  sur  $K$ . Le  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension  $n^2$ . Par suite, les  $n^2 + 1$  endomorphismes  $f^k$  pour  $0 \leq k \leq n^2$  sont des éléments linéairement dépendants de  $\mathcal{L}(E)$ . Il existe donc  $n^2 + 1$  scalaires  $\alpha_k$  de  $K$  tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k$$

soit un élément non nul de  $\text{Ker } \varphi_f$ .

**Lemme 26.** Supposons  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Les racines dans  $K$  de  $\chi_f$  et  $\mu_f$  sont les mêmes.

Démonstration : Soit  $\alpha$  un élément de  $K$ .

Supposons  $\mu_f(\alpha) = 0$ . Il existe  $P \in K[X]$  tel que l'on ait

$$\mu_f = (X - \alpha)P.$$

Dans l'anneau  $\mathcal{L}(E)$ , on a les égalités

$$0 = \mu_f(f) = (f - \alpha \text{Id}_E) \circ P(f).$$

Si  $\alpha$  n'était pas racine  $\chi_f$ , l'endomorphisme  $f - \alpha \text{Id}_E$  serait bijectif. On aurait ainsi  $P(f) = 0$ , d'où une contradiction car  $\mu_f$  étant un multiple de  $P$ , de degré strictement plus grand que celui de  $P$ , on a  $P(f) \neq 0$ . On a donc  $\chi_f(\alpha) = 0$ .

Inversement, supposons  $\chi_f(\alpha) = 0$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $f$  associé à  $\alpha$ . Posons  $\mu_f = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_1X + a_0$ . On a  $\mu_f(f) = 0$ , d'où

$$f^r + a_{r-1}f^{r-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{Id}_E = 0.$$

On a  $f(x) = \alpha x$ , d'où

$$\alpha^r x + a_{r-1}\alpha^{r-1}x + \dots + a_1\alpha x + a_0x = 0,$$

autrement dit,

$$\mu_f(\alpha)x = 0.$$

Puisque  $x$  n'est pas nul, on obtient  $\mu_f(\alpha) = 0$ , d'où le résultat.

**Définition 27.** Soit  $M$  une matrice de  $\mathbb{M}_n(K)$ . Le polynôme minimal de  $M$  est le polynôme minimal de l'endomorphisme représenté par  $M$  dans la base canonique de  $K^n$ .

### Exemples 28.

1) Soient  $\lambda$  un élément de  $K$  et  $M \in \mathbb{M}_n(K)$  la matrice (de Jordan) associée à  $\lambda$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $M$  est  $(X - \lambda)^n$ , donc  $\lambda$  est l'unique valeur propre de  $M$ . La dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda$  vaut 1. En effet,  $\lambda I_n - M$  est de rang  $n - 1$ , car  $\lambda I_n - M$  n'est pas inversible et on peut en extraire une matrice de  $\mathbb{M}_{n-1}(K)$  inversible. La dimension du noyau de  $\lambda I_n - M$  vaut donc 1.

Vérifions que le polynôme minimal de  $M$  est aussi  $(X - \lambda)^n$ . Posons

$$M = \lambda I_n + N.$$

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $K^n$ . Pour tout  $k$  vérifiant  $1 \leq k \leq n-1$ , on a  $N(e_k) = e_{k+1}$ , d'où

$$N^k(e_1) = e_{k+1}.$$

Le système  $(e_1, N(e_1), N^2(e_1), \dots, N^{n-1}(e_1))$  est donc une base de  $K^n$  (c'est la base canonique). Par ailleurs, on a  $N^n(e_1) = N(e_n) = 0$ . Ainsi,  $N^n$  étant nul sur les vecteurs d'une base, on a  $N^n = 0$ . Puisque l'on a  $N^{n-1}(e_1) \neq 0$ , le polynôme minimal de  $N$  est donc  $X^n$ . Cela implique notre assertion.

2) Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^3 = 2A^2 - A$ . Vérifions que la trace de  $A$  est un entier naturel. Posons  $P = X^3 - 2X^2 + X \in \mathbb{C}[X]$ . On a  $P = X(X-1)^2$  et  $P(A) = 0$ . Le polynôme minimal de  $A$  divise  $P$ . On en déduit que les valeurs propres de  $A$  valent 0 ou 1 (lemme 26). La trace de  $A$  étant la somme de ses valeurs propres (cor. 18), c'est donc un entier naturel.

3) Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $AB = 0$ , donc le polynôme minimal de  $AB$  est  $X$ . On a  $BA = B$  et le polynôme minimal de  $B$  est  $X^2$ . En particulier,  $AB$  et  $BA$  n'ont pas le même polynôme minimal.

4) Soient  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  et  $f : E \rightarrow E$  l'endomorphisme de dérivation. Alors,  $f$  n'a pas de polynôme minimal. En effet, supposons qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  non nul tel que l'on ait  $P(f) = 0$ . Notons  $n$  le degré de  $P$ . Il existe des nombres réels  $a_i$ , avec  $a_n \neq 0$ , tels que

$$\sum_{k=0}^n a_k f^k = 0.$$

En prenant l'image de  $X^n$  dans les deux membres de cette égalité et en substituant  $X$  par 0, on obtient  $n!a_n = 0$ , ce qui conduit à une contradiction.

## 5. Endomorphismes diagonalisables

Supposons  $E$  de dimension finie  $n$  sur  $K$ . Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $f$ , notons  $E(\lambda)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$ .

**Définition 29.** On dit que  $f$  est diagonalisable si  $E$  est la somme des sous-espaces propres de  $f$ .

La somme des sous-espaces propres de  $f$  est directe (prop. 11). Le fait que  $f$  soit diagonalisable signifie donc que  $E$  est somme directe des sous-espaces propres de  $f$ . Avec la notation en usage, cela se traduit par l'égalité

$$(3) \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E(\lambda).$$

Autrement dit :

**Lemme 30.** *Pour que  $f$  soit diagonalisable il faut et il suffit qu'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .*

Démonstration : D'après (3), la condition est nécessaire. Inversement, s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ , tout vecteur de  $E$  appartient alors à la somme des sous-espaces propres de  $f$ , donc  $f$  est diagonalisable (déf. 29).

**Exemples 31.**

1) Si  $n = 0$ , alors  $f$  est diagonalisable car la somme vide des sous-espaces propres de  $f$  est nulle.

2) L'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Une base de vecteurs propres est  $((1, 1), (1, -1))$ .

3) L'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  représenté dans la base canonique par la matrice de Jordan, intervenant dans l'exemple 28, n'est pas diagonalisable si  $n \geq 2$ . En effet, la dimension du sous-espace propre associé à sa seule valeur propre  $\lambda$  vaut 1.

**Théorème 32.** *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.*

2) *Il existe une base de  $E$  dans laquelle  $f$  est représenté par une matrice diagonale.*

3) *Le polynôme caractéristique de  $f$  a toutes ses racines dans  $K$  et la multiplicité de chaque racine est la dimension du sous-espace propre de  $f$  qui lui est associé.*

Démonstration : Ces assertions sont vraies si  $n = 0$ . On supposera donc  $n \geq 1$ .

Supposons  $f$  diagonalisable. En choisissant des bases de chacun des  $E(\lambda)$  pour  $\lambda$  dans  $\text{Sp}(f)$ , et en les réunissant, on obtient une base de  $E$  dans laquelle  $f$  est représenté par une matrice diagonale.

Vérifions l'implication 2)  $\implies$  3). Par hypothèse, il existe une base  $\mathcal{B}_0$  de  $E$  dans laquelle  $f$  est représenté par une matrice diagonale  $M$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les éléments diagonaux de  $M$ , deux à deux distincts, apparaissant  $m_1, \dots, m_p$  fois respectivement. On a

$$\chi_f = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

En particulier,  $\chi_f$  a toutes ses racines dans  $K$ . Il reste à établir que l'on a

$$(4) \quad \dim E(\lambda_i) = m_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

Les vecteurs de  $\mathcal{B}_0$  sont des vecteurs propres de  $f$ . Pour tout  $i$ , ceux associés à  $\lambda_i$  forment un système libre à  $m_i$  éléments de  $E(\lambda_i)$ . On a donc  $\dim E(\lambda_i) \geq m_i$ . Par ailleurs, on a  $\dim E(\lambda_i) \leq m_i$  (cor. 22), d'où (4).

Démontrons que la troisième assertion entraîne la première. L'endomorphisme  $f$  possède de  $p$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_p$  respectivement, telles que l'on ait

$$n = \sum_{i=1}^p m_i \quad \text{et} \quad m_i = \dim E(\lambda_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, p.$$

Il en résulte que la dimension de la somme des  $E(\lambda_i)$  est  $n$  (cor. 12). Ainsi,  $E$  est la somme des  $E(\lambda_i)$  i.e.  $f$  est diagonalisable.

**Corollaire 33.** *Si  $f$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  est diagonalisable.*

Démonstration : D'après l'hypothèse faite,  $f$  possède  $n$  sous-espaces propres qui sont de dimension 1. Leur somme est donc  $E$ , d'où l'assertion.

**Remarque 34.** Un endomorphisme diagonalisable a des sous-espaces propres dont les dimensions sont les plus grandes possibles (cor. 22).

On dispose aussi d'une caractérisation pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable en terme de son polynôme minimal. Elle est très utile en pratique.

**Théorème 35.** *Pour que  $f$  soit diagonalisable il faut et il suffit que son polynôme minimal ait toutes ses racines dans  $K$  et qu'elles soient simples.*

Démonstration : Supposons  $f$  diagonalisable. Il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  les valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. Posons

$$P = \prod_{i=1}^t (X - \lambda_i).$$

On a

$$P(f) = \prod_{i=1}^t (f - \lambda_i \text{Id}_E).$$

Vérifions que l'on a

$$P(f) = 0.$$

Soit  $j$  un entier entre 1 et  $n$ . Il suffit de montrer que l'on a

$$P(f)(e_j) = 0.$$

Soit  $k$  l'entier entre 1 et  $t$  tel que  $f(e_j) = \lambda_k e_j$ . Considérons une permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_t$  telle que  $\sigma(t) = k$ . L'égalité

$$P(f) = \prod_{i=1}^{t-1} (f - \lambda_{\sigma(i)} \text{Id}_E) \circ (f - \lambda_k \text{Id}_E),$$

entraîne alors l'assertion. Il en résulte que le polynôme minimal  $\mu_f$  de  $f$  divise  $P$ . En particulier, toutes les racines de  $\mu_f$  sont dans  $K$  et elles sont simples.

Inversement, supposons que toutes les racines de  $\mu_f$  soient dans  $K$  et qu'elles soient simples. Il existe des éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  dans  $K$ , avec  $\alpha_i \neq \alpha_j$  si  $i \neq j$ , tels que

$$\mu_f = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i).$$

Les  $\alpha_i$  sont exactement les valeurs propres de  $f$  (lemme 26). Notons  $n_i$  la dimension du sous-espace propre de  $f$  associé à  $\alpha_i$ . On a

$$0 = \mu_f(f) = \prod_{i=1}^r (f - \alpha_i \text{Id}_E).$$

Par ailleurs, on a

$$(5) \quad \dim \text{Ker} \left( \prod_{i=1}^r (f - \alpha_i \text{Id}_E) \right) \leq \sum_{i=1}^r n_i^{(1)}.$$

On en déduit l'inégalité

$$n \leq \sum_{i=1}^r n_i.$$

La somme des  $n_i$  étant plus petite que  $n$  (lemme 9), on obtient

$$n = \sum_{i=1}^r n_i.$$

Ainsi,  $E$  est la somme des sous-espaces propres de  $f$  (*loc. cit.*), donc  $f$  est diagonalisable.

---

<sup>(1)</sup> Soient  $f_1, \dots, f_r$  des endomorphismes de  $E$ . Afin d'établir la formule (5), il suffit de prouver l'inégalité

$$\dim \text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_r) \leq \sum_{i=1}^r \dim \text{Ker} f_i.$$

En procédant par récurrence, on se ramène au cas où  $r = 2$ . Soient  $f$  et  $g$  des endomor-

**Corollaire 36.** Supposons  $K = \mathbb{C}$ . Alors,  $f$  est diagonalisable si et seulement si les racines de son polynôme minimal sont simples.

**Exemples 37.**

1) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $K^3$  représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_f = X(X^2 + 4).$$

Si  $K = \mathbb{R}$ ,  $f$  n'est donc pas diagonalisable. Si  $K = \mathbb{C}$ ,  $f$  est diagonalisable, car ses valeurs propres, 0 et  $\pm 2i$ , sont simples.

2) Un endomorphisme  $f$  de  $K^n$ , distinct de l'identité, dont la matrice dans la base canonique est triangulaire avec des 1 sur sa diagonale, n'est pas diagonalisable. En effet, on a  $\chi_f = (X - 1)^n$ , donc 1 est la seule valeur propre de  $f$ . Par suite, si  $f$  était diagonalisable,  $f$  serait l'identité.

3) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_f = X(X - 1)(X - 4),$$

---

phismes de  $E$ . Vérifions que l'on a

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g.$$

Considérons pour cela l'endomorphisme

$$g|_{f(E)} : f(E) \rightarrow E,$$

la restriction de  $g$  à  $f(E)$ . On a l'égalité  $\dim f(E) = \dim \operatorname{Ker} g|_{f(E)} + \dim (g \circ f)(E)$ . Le noyau de  $g|_{f(E)}$  est contenu dans le noyau de  $g$ , d'où  $\dim \operatorname{Ker} g|_{f(E)} \leq \dim \operatorname{Ker} g$ , puis

$$\dim f(E) \leq \dim \operatorname{Ker} g + \dim (g \circ f)(E).$$

Les égalités

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim f(E) \quad \text{et} \quad \dim E = \dim \operatorname{Ker}(g \circ f) + \dim (g \circ f)(E),$$

entraînent alors le résultat.



d'où  $\text{Sp}(f) = \{0, 1, 4\}$  et  $f$  est diagonalisable. Calculons  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , notons  $E(\lambda)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$ . On vérifie que  $(1, -2, 0)$  est une base de  $E(0)$ , que  $(1, 0, 1)$  est une base de  $E(1)$  et que  $(1, -1, 0)$  est une base de  $E(4)$ . Le triplet  $(v_1, v_2, v_3)$  où

$$v_1 = (1, -2, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 0),$$

est donc une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $f$ . La matrice de  $f$  dans cette base est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique à la base  $(v_1, v_2, v_3)$  est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $A^k = PD^kP^{-1}$ . On vérifie que l'on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si  $k \geq 1$ , on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}.$$

Si  $k = 0$ , on a  $D^k = I_3$ . On en déduit que pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$A^k = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^k & 4^k & 1 - 2 \cdot 4^k \\ -2 \cdot 4^k & -4^k & 2 \cdot 4^k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $k = 0$ , on a  $A^0 = I_3$ .

4) Supposons  $K = \mathbb{C}$  et l'existence d'un entier  $r \geq 1$  tel que  $f^r = \text{Id}_E$ . Vérifions que  $f$  est diagonalisable. Le polynôme  $X^r - 1$  annule  $f$ , et ses racines

$$\exp\left(\frac{2\pi ki}{r}\right) \quad \text{pour } k = 0, \dots, r-1$$

sont distinctes deux à deux. Puisque  $\mu_f$  divise  $X^r - 1$ , les racines de  $\mu_f$  sont simples, d'où l'assertion (th. 35).

Établissons l'énoncé suivant concernant la diagonalisation simultanée éventuelle de deux endomorphismes.

**Proposition 38.** *Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  diagonalisables tels que l'on ait  $f \circ g = g \circ f$ . Il existe une base de  $E$  dans laquelle  $f$  et  $g$  sont représentés par des matrices diagonales.*

Démonstration : Procédons par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ . Le résultat est vrai si  $n = 0$ . Supposons  $n \geq 1$  et le résultat vrai pour tous les espaces vectoriels sur  $K$  de dimension  $\leq n - 1$ . Il s'agit de montrer l'existence d'une base de  $E$  dans laquelle  $f$  et  $g$  sont représentés par une matrice diagonale. Si  $f$  et  $g$  sont des homothéties, toute base de  $E$  convient. Supposons par exemple que  $f$  ne soit pas une homothétie. Notons  $(E_\alpha)_\alpha$  la famille des sous-espaces propres de  $f$ . Puisque  $f$  est diagonalisable, on a

$$(6) \quad E = \bigoplus_{\alpha} E_{\alpha}.$$

Pour tout  $\alpha$ , vu que  $f$  n'est pas une homothétie, la dimension de  $E_\alpha$  est strictement plus petite que  $n$ . Le sous-espace  $E_\alpha$  est stable par  $f$  et parce que  $f$  et  $g$  commutent,  $E_\alpha$  est aussi stable par  $g$ . Les restrictions  $f|_{E_\alpha}$  et  $g|_{E_\alpha}$  de  $f$  et  $g$  à  $E_\alpha$  sont donc des endomorphismes de  $E_\alpha$ . Les polynômes minimaux de  $f|_{E_\alpha}$  et  $g|_{E_\alpha}$  divisent ceux de  $f$  et  $g$ , en particulier ils ont toutes leurs racines dans  $K$  et elles sont simples. Par suite,  $f|_{E_\alpha}$  et  $g|_{E_\alpha}$  sont diagonalisables (th. 35). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base  $\mathcal{B}_\alpha$  de  $E_\alpha$  dans laquelle  $f|_{E_\alpha}$  et  $g|_{E_\alpha}$  sont représentés par des matrices diagonales. Compte tenu de (6), la réunion des  $\mathcal{B}_\alpha$  est une base de  $E$ , dans laquelle  $f$  et  $g$  sont représentés par des matrices diagonales, d'où le résultat.

## 6. Endomorphismes trigonalisables

Supposons  $E$  de dimension finie  $n$  sur  $K$ .

**Définition 39.** *On dit que  $f$  est trigonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $f$  est représenté par une matrice triangulaire.*

Si tel est le cas, on peut imposer que  $f$  soit représenté par une matrice triangulaire supérieure (car toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure).

**Théorème 40.** *Pour que  $f$  soit trigonalisable il faut et il suffit que son polynôme caractéristique ait toutes ses racines dans  $K$ .*

Démonstration : Supposons qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $f$  est représenté par une matrice triangulaire  $M$ . Si  $a_1, \dots, a_n$  sont les éléments diagonaux de  $M$ , le polynôme

caractéristique de  $f$  est

$$\chi_f = \prod_{i=1}^n (X - a_i),$$

donc  $\chi_f$  a toutes ses racines dans  $K$ .

Inversement, supposons que  $\chi_f$  ait toutes ses racines dans  $K$ . Procédons par récurrence sur  $n$ . Le résultat est vrai si  $n = 0$ . Supposons  $n \geq 1$  et que tout endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n' < n$ , dont le polynôme caractéristique a toutes ses racines dans  $K$ , soit trigonalisable. Par hypothèse,  $\chi_f$  a au moins une racine  $\alpha_{11}$  dans  $K$ . Soit  $x_1 \in E$  un vecteur propre de  $f$  associé à  $\alpha_{11}$ . Notons  $D$  la droite de  $E$  engendrée par  $x_1$  et choisissons un supplémentaire  $F$  de  $D$  dans  $E$ . Soient  $p : E \rightarrow E$  la projection de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $D$  et  $g : F \rightarrow F$  l'endomorphisme de  $F$  défini pour tout  $x \in F$  par

$$g(x) = p(f(x)).$$

Montrons que  $g$  a toutes ses valeurs propres dans  $K$ . On a  $\dim F = n - 1$ . Soient  $(y_2, \dots, y_n)$  une base de  $F$  et  $A$  la matrice de  $g$  dans cette base. Par définition de l'endomorphisme  $p$ , pour tout  $i = 2, \dots, n$ , il existe des scalaires  $\alpha_{1i} \in K$  tels que l'on ait

$$f(y_i) = \alpha_{1i}x_1 + g(y_i).$$

Le système  $(x_1, y_2, \dots, y_n)$  est une base de  $E$  et la matrice de  $f$  dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ 0 & \beta_{32} & \cdots & \beta_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a  $A = (\beta_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ . Il résulte alors de la proposition 19 que l'on a

$$\chi_f = (X - \alpha_{11})\chi_g.$$

Par suite,  $\chi_g$  divise  $\chi_f$ , ce qui implique notre assertion. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une base  $\mathcal{B}'$  de  $F$  dans laquelle  $g$  est représenté par une matrice triangulaire. On en déduit que dans la base  $\mathcal{B}' \cup \{x_1\}$  de  $E$ ,  $f$  est aussi représenté par une matrice triangulaire, d'où le résultat.

**Corollaire 41.** *Supposons  $K = \mathbb{C}$ . Alors  $f$  est trigonalisable.*

**Corollaire 42.** *Supposons  $K = \mathbb{C}$ . Soit  $M$  une matrice de  $\mathbb{M}_n(K)$ . Il existe  $P \in \mathbb{M}_n(K)$  inversible telle que  $P^{-1}MP$  soit une matrice triangulaire.*

**Exemple 43.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_f = X^3 - X^2 - 5X - 3 = (X - 3)(X + 1)^2.$$

Le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $-1$  est de dimension 1, c'est la droite engendrée par  $u_1 = (1, 2, 1)$ , par suite  $f$  n'est pas diagonalisable (th. 32). Cela étant,  $f$  est trigonalisable (th. 39). Le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre 3 est la droite engendrée par  $u_2 = (1, 2, 2)$ . Soit  $u_3$  un vecteur qui n'est pas dans le plan engendré par  $u_1$  et  $u_2$ . Alors,  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est triangulaire. On vérifie que, par exemple,  $u_3 = (1, 0, 0)$  convient (le déterminant des vecteurs  $u_i$  dans la base canonique est 2). La matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$  est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

et que

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 7. Théorème de Cayley-Hamilton

Supposons  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Il s'agit de l'énoncé suivant.

**Théorème 44.** *On a l'égalité*

$$\chi_f(f) = 0.$$

Démonstration : Posons  $n = \dim E$ . Si  $n = 0$ , on a  $\chi_f = 1$ , d'où  $\chi_f(f) = \text{Id}_E = 0$ . Supposons désormais  $n \geq 1$ . Posons

$$\chi_f = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Soit  $M$  une matrice de  $\mathbb{M}_n(K)$  représentant  $f$ . Il s'agit de démontrer que l'on a dans  $\mathbb{M}_n(K)$  l'égalité

$$\sum_{k=0}^n a_k M^k = 0.$$

Notons  $C(X)$  la matrice transposée de la comatrice de  $XI_n - M$ . C'est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus  $n - 1$ . Il existe donc des matrices  $\Gamma_k \in \mathbb{M}_n(K)$  telles que l'on ait

$$C(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \Gamma_k.$$

On a (Chap. III, th. 55)

$$(XI_n - M)C(X) = (\det(XI_n - M))I_n.$$

On obtient l'égalité

$$(7) \quad (XI_n - M) \sum_{k=0}^{n-1} X^k \Gamma_k - \sum_{k=0}^n a_k X^k I_n = 0.$$

Le premier membre de (7) s'écrit

$$\sum_{k=0}^n X^k B_k \quad \text{où} \quad B_k \in \mathbb{M}_n(K).$$

Vu que cette matrice est nulle, cela implique

$$B_k = 0 \quad \text{pour tout} \quad k = 0, \dots, n.$$

Il en résulte que l'on a

$$-M\Gamma_0 = a_0 I_n, \quad \Gamma_{k-1} - M\Gamma_k = a_k I_n \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \Gamma_{n-1} = a_n I_n.$$

On en déduit que

$$-M\Gamma_0 + \sum_{k=1}^{n-1} M^k (\Gamma_{k-1} - M\Gamma_k) + M^n \Gamma_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k M^k.$$

Le premier membre de cette égalité étant nul, on obtient le résultat.

**Corollaire 45.** *Le polynôme minimal  $\mu_f$  divise  $\chi_f$ .*

Comme application du théorème de Cayley-Hamilton, précisons l'énoncé du lemme 26.

**Corollaire 46.** *Soit  $L$  un corps commutatif contenant  $K$ . Les racines dans  $L$  de  $\chi_f$  et  $\mu_f$  sont les mêmes.*

Démonstration : D'après le corollaire précédent, les racines dans  $L$  de  $\mu_f$  sont des racines de  $\chi_f$ . Inversement, soit  $\alpha \in L$  une racine de  $\chi_f$ . Soit  $M$  une matrice qui représente  $f$  dans une base de  $E$ . Notons  $f_L : L^n \rightarrow L^n$  l'endomorphisme du  $L$ -espace vectoriel  $L^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $L^n$  est  $M$ . Le polynôme caractéristique de  $f_L$  est  $\chi_f$ . Il existe donc  $x \in L^n$  non nul tel que l'on ait

$$f_L(x) = \alpha x.$$

Par ailleurs, on a  $\mu_f(M) = 0$ . Dans l'algèbre des endomorphismes de  $L^n$ , on a donc

$$\mu_f(f_L) = 0.$$

Dans  $L^n$ , on en déduit l'égalité

$$\mu_f(\alpha)x = 0.$$

Puisque  $x$  est non nul, on a  $\mu_f(\alpha) = 0$ , d'où le résultat.