

Chapitre II - Espaces vectoriels - Applications linéaires

La définition axiomatique d'espace vectoriel a été exposée pour la première fois par Giuseppe Peano (1858-1932) vers la fin du XIX^e siècle. Cela a permis de formaliser de façon rigoureuse de nombreux concepts déjà existants et d'en fournir une intuition géométrique. Tout en définissant les notions générales de l'algèbre linéaire, on se préoccupera notamment de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif K . Un exemple typique d'un tel espace vectoriel est le produit cartésien $K^n = K \times \cdots \times K$ (n facteurs). Il est de dimension finie n sur K . C'est d'ailleurs le seul, à isomorphisme près, de dimension n sur K . Cela étant, la théorie «en dimension infinie» apparaît naturellement dans de nombreux domaines en mathématiques, par exemple en analyse fonctionnelle concernant l'étude des espaces de fonctions.

Table des matières

1. Espaces vectoriels	1
2. Sous-espaces vectoriels	4
3. Applications linéaires	8
4. Relations linéaires	11
5. La notion de dimension	16
6. Isomorphisme et dimension	22
7. Dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire	24
8. Matrice d'une application linéaire	26
9. La notion de rang	35

1. Espaces vectoriels

Dans toute la suite, la lettre K désigne un corps commutatif.

Définition 1. On appelle *espace vectoriel sur K* , ou *K -espace vectoriel*, un triplet formé d'un ensemble E , d'une loi de composition interne $E \times E \rightarrow E$, notée

$$(x, y) \mapsto x + y,$$

et d'une application $K \times E \rightarrow E$, appelée *loi de composition externe*, notée

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

tels que les conditions suivantes soient remplies.

- 1) Le couple $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- 2) Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$, on a les relations

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad 1x = x.$$

Dans cette définition, on note de la même façon la loi additive du corps K et la loi de composition interne sur E . Il en est de même en ce qui concerne la loi multiplicative sur K et la loi de composition externe sur E . On notera 0 l'élément neutre du groupe additif $(K, +)$ ou bien l'élément neutre du groupe $(E, +)$. Cela ne doit pas prêter à confusion en fonction du contexte. On dit souvent que les éléments de K sont des scalaires et que les éléments de E sont des vecteurs.

Lemme 2. Pour tous $\lambda \in K$ et $x \in E$, on a

$$\lambda 0 = 0, \quad 0x = 0, \quad \lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x,$$

$$\lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Démonstration : On a $\lambda 0 + \lambda x = \lambda(0 + x) = \lambda x$, d'où $\lambda 0 = \lambda x - \lambda x = 0$. Par ailleurs, on a $0x + \lambda x = (0 + \lambda)x = \lambda x$, d'où $0x = 0$. On en déduit que l'on a

$$\lambda(-x) + \lambda x = \lambda(-x + x) = \lambda 0 = 0 \quad \text{et} \quad (-\lambda)x + \lambda x = (-\lambda + \lambda)x = 0x = 0,$$

d'où $\lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x$. Supposons $\lambda x = 0$ et $\lambda \neq 0$. On a alors $\lambda^{-1}(\lambda x) = x = 0$. L'implication réciproque résulte de ce qui précède.

Exemples 3.

1) Soit $\{0\}$ le groupe trivial. Il est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K , en posant pour tout $\lambda \in K$, $\lambda 0 = 0$. On dit que $\{0\}$ est l'espace vectoriel nul.

2) Tout corps commutatif L contenant K est muni de la structure de K -espace vectoriel, pour laquelle la loi de composition interne est celle de L et la loi externe $K \times L \rightarrow L$ est celle qui au couple $(\lambda, x) \in K \times L$ associe le produit λx dans L . En particulier, K est ainsi muni d'une structure de K -espace vectoriel.

3) Soient n un entier naturel et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n espaces vectoriels sur K . Le produit cartésien

$$E_1 \times \cdots \times E_n$$

est muni d'une structure de K -espace vectoriel, en posant par définition

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (x_i, y_i \in E_i),$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad (\lambda \in K).$$

Par convention, si $n = 0$, ce produit cartésien est l'espace vectoriel nul. En prenant $E_i = K$, ces lois de composition munissent l'ensemble $K^n = K \times \dots \times K$ d'une structure de K -espace vectoriel.

4) L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K en l'indéterminée X , est un K -espace vectoriel, en posant par définition

$$\sum a_n X^n + \sum b_n X^n = \sum (a_n + b_n) X^n,$$

$$\lambda \sum a_n X^n = \sum (\lambda a_n) X^n.$$

5) L'ensemble des matrices $M_{n,p}(K)$ est un K -espace vectoriel muni de la structure explicitée dans la définition 3 du chapitre I.

6) Soient E un espace vectoriel sur K et X un ensemble. L'ensemble E^X des applications de X dans E est muni d'une structure de K -espace vectoriel, en définissant pour tous $f, g \in E^X$ et $\lambda \in K$ les applications $f + g$ et λf par les égalités

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

En particulier, l'ensemble $K^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de K est ainsi muni d'une structure de K -espace vectoriel.

Quand on évoquera ces ensembles comme espaces vectoriels sur K , sans autre précision, ils seront toujours munis implicitement des structures définies dans ces exemples.

Définissons maintenant la notion de combinaison linéaire à coefficients dans K d'une famille d'éléments de E . Considérons un ensemble I et une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E . Supposons d'abord que I est fini, cas essentiel pour la suite.

Définition 4 (Combinaison linéaire - Cas où I est fini). Posons $I = \{1, \dots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. On appelle combinaison linéaire des x_i tout vecteur $x \in E$ de la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont dans K .

Généralisons cette définition au cas où I est infini. C'est indispensable dans de nombreuses situations. Précisons pour cela ce que l'on entend par famille d'éléments de K à support fini indexée par I .

Définition 5. On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K est à support fini, ou que les λ_i sont presque tous nuls, pour signifier que l'ensemble des $i \in I$ tels que $\lambda_i \neq 0$ est fini.

Définition 6 (Combinaison linéaire - Cas général). On appelle combinaison linéaire des x_i tout vecteur $x \in E$ possédant la propriété suivante : il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , à support fini, telle que l'on ait

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

Cette définition se justifie par le fait que $0x_i = 0$ pour tout i (lemme 2). Avec ces notations, si J est l'ensemble des $i \in I$ tel que $\lambda_i \neq 0$, alors J est fini et on a

$$x = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i.$$

Bien entendu, la définition 6 n'a d'intérêt que si I est infini. Si I est fini, les définitions 4 et 6 sont les mêmes.

Exemple 7. Dans le K -espace vectoriel $K[X]$, tout vecteur est par définition combinaison linéaire des monômes X^n ($n \in \mathbb{N}$). Cet exemple illustre la notion de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs indexée par \mathbb{N} .

2. Sous-espaces vectoriels

Soit E un K -espace vectoriel.

Définition 8. Soit F une partie de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$, autrement dit, 0 est dans F et pour tous $x, y \in F$, $x - y$ appartient à F .
- 2) Pour tous $\lambda \in K$ et $x \in F$, λx appartient à F .

Soit F un sous-espace vectoriel de E . D'après la condition 1, $(F, +)$ est un groupe commutatif. Par ailleurs, la condition 2 permet de définir l'application $K \times F \rightarrow F$ qui à (λ, x) associe λx . Les relations figurant dans la définition 1 sont a fortiori vérifiées dans F . Ainsi, F est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel sur K . Quand on évoquera F comme espace vectoriel sur K , ou sous-entendra toujours que c'est de cette structure dont il s'agit.

Lemme 9. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) 0 est dans F .

2) Pour tous $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in K$, le vecteur $\lambda x + \mu y$ appartient à F .

Démonstration : Si F est un sous-espace vectoriel de E , c'est un sous-groupe additif de E , par suite 0 est dans F et il résulte directement des définitions que la seconde condition est satisfaite. Inversement, avec $\mu = 0$, on obtient la seconde condition de la définition. Avec $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on en déduit que pour tous $x, y \in F$, $x + (-1)y$ est dans F . On a $(-1)y = -y$ (lemme 2), donc $x - y$ est dans F . Parce que 0 est supposé être dans F , c'est donc un sous-groupe additif de E , d'où le résultat.

Exemples 10.

1) Le singleton $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

2) Dans $M_n(K)$ le sous-ensemble formé des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$. Il en est de même de celui formé des matrices triangulaires supérieures, et de celui des matrices triangulaires inférieures.

3) L'ensemble des nombres réels est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble de $K[X]$ formé des polynômes dont le degré est au plus égal à n est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

5) L'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . L'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 1$ n'en est pas un, car il ne contient pas $(0, 0)$ (le neutre additif de \mathbb{R}^2).

6) Soit X un ensemble. Notons $K^{(X)}$ l'ensemble des applications $f : X \rightarrow K$ telles que l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ soit fini. Alors, $K^{(X)}$ est un sous-espace vectoriel de K^X .

Proposition 11. Soient I un ensemble non vide et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors, l'intersection des F_i est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : Soit F l'intersection des F_i . Pour tout $i \in I$, 0 est dans F_i , donc 0 est dans F . Soient x et y des éléments de F . Ils appartiennent à tous les F_i , donc pour tout $i \in I$, $x - y$ est dans F_i , i.e. $x - y$ est dans F . De même, si $\lambda \in K$, λx est dans tous les F_i , d'où l'assertion.

Remarque 12. Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. Plus précisément, soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Alors, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si on a $F \subseteq G$ ou bien $G \subseteq F$. En effet, s'il existe $x \in F \setminus G$ et y dans $G \setminus F$, alors $x + y$ n'est pas dans $F \cup G$, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E . Inversement, $F \cup G$ est F ou G , d'où l'assertion. En particulier, la réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts de E , i.e. autres que E , est toujours distincte de E . Cela étant, il existe des espaces vectoriels qui sont réunion de trois

sous-espaces vectoriels stricts. Par exemple, prenons $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le corps à deux éléments, et $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Posons $F_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $F_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$, $F_3 = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Ce sont trois sous-espaces vectoriels stricts de E , dont la réunion est E .

La proposition 11 justifie la définition suivante.

Définition 13 (Sous-espace vectoriel engendré). Soit X une partie E . On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par X , l'intersection des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X .

Notation. On notera $\text{vect}(X)$, ou parfois $\text{vect } X$, le sous-espace vectoriel de E engendré par X .

On retiendra que $\text{vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X , au sens de l'inclusion. Démontrons que $\text{vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X (au sens de la définition 6).

Proposition 14. Soit X une partie de E . Le sous-espace vectoriel $\text{vect}(X)$ de E est l'ensemble des vecteurs de E de la forme

$$\sum_{a \in X} \lambda_a a,$$

où $(\lambda_a)_{a \in X}$ parcourt l'ensemble des familles d'éléments de K , à support fini, indexées par X .

Démonstration : Notons V l'ensemble des éléments de la forme indiquée dans l'énoncé. C'est un sous-espace vectoriel de E , car 0 est dans V , et si $(\lambda_a)_{a \in X}$, $(\mu_a)_{a \in X}$ sont des familles à support fini d'éléments de K , il en est de même des familles $(\lambda_a + \mu_a)_{a \in X}$ et $(\alpha \lambda_a)_{a \in X}$ pour tout $\alpha \in K$. Par ailleurs, tout sous-espace vectoriel de E contenant X contient V (cf. le lemme 9). Par suite, V est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X , d'où le résultat.

Dans le cas particulier où X est fini, on en déduit l'énoncé essentiel suivant.

Corollaire 15. Supposons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. On a

$$\text{vect}(X) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \right\}.$$

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Décrivons $\text{vect}(F \cup G)$.

Définition 16 (Somme de deux sous-espaces). La somme de F et G , qui se note $F + G$, est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x + y$ où $x \in F$ et $y \in G$.

Lemme 17. *On a l'égalité*

$$\text{vect}(F \cup G) = F + G.$$

Démonstration : On vérifie directement que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . Par ailleurs, un sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$, contient F et G donc aussi $F + G$, d'où l'assertion.

Définition 18 (Sous-espaces supplémentaires). *On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires si on a*

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\}.$$

Dans ce cas, on dit que E est somme directe de F et G . On note $E = F \oplus G$.

Lemme 19. *On a $E = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .*

Démonstration : Supposons $E = F \oplus G$. On a en particulier $E = F + G$, et si on a $x + y = x' + y'$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$, on obtient $x - x' = y' - y$ qui est dans $F \cap G$, d'où $x = x'$ et $y = y'$. Inversement, il s'agit de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit x un élément de F et G . On a $x = x + 0 = 0 + x$ et d'après le caractère d'unicité d'une telle écriture, on a donc $x = 0$.

Exemples 20.

1) Dans le K -espace vectoriel K^n , pour tout i entre 1 et n , posons

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

où 1 est la « i -ème coordonnée» de e_i , cette appellation sera justifiée plus loin. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Ainsi, tout $x \in K^n$ est combinaison linéaire des vecteurs e_1, \dots, e_n . On a donc

$$K^n = \text{vect} \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Plus précisément ici, tout élément de K^n s'écrit, de manière unique, comme une combinaison linéaire des e_i .

2) Dans le K -espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,p}(K)$, soit $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Pour tout $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$, on a

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{i,j}.$$

Toute matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ est donc combinaison linéaire des $E_{i,j}$, d'où

$$\mathbb{M}_{n,p}(K) = \text{vect} \{ E_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p \}.$$

Là encore, tout élément de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ s'écrit, de manière unique, comme une combinaison linéaire des $E_{i,j}$.

3) Dans le K -espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K , on a

$$K[X] = \text{vect} \{ X^n \mid n \in \mathbb{N} \},$$

et par définition tout polynôme s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des X^n .

4) Considérons les trois vecteurs de K^3 , $x = (1, 2, 3)$, $y = (-1, 5, 6)$ et $z = (3, -1, 0)$. On a $2x - y = z$, d'où

$$\text{vect} \{ x, y, z \} = \text{vect} \{ x, y \}.$$

En particulier, tout élément de $\text{vect} \{ x, y, z \}$ ne s'écrit pas de manière unique comme une combinaison linéaire de x, y, z , contrairement aux situations précédentes.

5) Dans le K -espace vectoriel K^2 les sous-espaces vectoriels $\text{vect} \{ e_1 \}$ et $\text{vect} \{ e_1 + e_2 \}$ sont supplémentaires.

6) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles convergentes. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient F le sous-ensemble de E formé des suites constantes et G celui formé des suites convergentes de limite nulle. Ce sont des sous-espaces vectoriels de E . Ils sont supplémentaires. En effet, la condition $F \cap G = \{0\}$ est visiblement satisfaite. Par ailleurs, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E . Notons ℓ sa limite et posons $v_n = u_n - \ell$. Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans G et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n + \ell$, d'où l'assertion.

3. Applications linéaires

Soient E et F des espaces vectoriels sur K et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition 21. On dit que f est linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1) Pour tous x et y dans E , on a

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2) Pour tous $\lambda \in K$ et $x \in E$, on a

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Terminologie. On dit parfois qu'une application linéaire de E dans F est K -linéaire pour préciser le corps de base si besoin est. On appelle isomorphisme de E sur F toute

application linéaire bijective de E sur F . S'il en existe, on dit que E et F sont isomorphes. Une application linéaire de E dans E s'appelle un endomorphisme de E . Un isomorphisme de E sur E s'appelle un automorphisme de E .

Remarque 22. On déduit de la seconde condition, avec $\lambda = 0$, que l'on a

$$(1) \quad f(0) = 0.$$

On devrait plutôt écrire que l'on a $f(0_E) = 0_F$, où 0_E (resp. 0_F) est l'élément neutre additif de E (resp. de F). On convient donc implicitement dans l'égalité (1) de noter 0 à la fois l'élément neutre de E et celui de F .

Exemples 23.

1) Prenons $E = F = K$. Soit $h : K \rightarrow K$ une application. Alors, h est linéaire si et seulement si il existe $\lambda \in K$ tel que pour tout $x \in K$, on ait $h(x) = \lambda x$. On dit que h est l'homothétie de rapport λ dans K .

En effet, si h est linéaire, pour tout $x \in K$, on a $h(x) = h(x.1) = xh(1)$ et $\lambda = h(1)$ convient. Inversement, le fait qu'une telle application soit linéaire résulte de la définition.

2) L'application $p_i : K^n \rightarrow K$ définie par $p_i((x_1, \dots, x_n)) = x_i$ est linéaire. On dit que c'est la i -ème projection de K^n sur K .

3) L'application $K[X] \rightarrow K[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé est linéaire.

4) L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe \bar{z} (le conjugué de z) est \mathbb{R} -linéaire, mais n'est pas \mathbb{C} -linéaire. Il faut préciser ici le corps de base, car \mathbb{C} est à la fois un \mathbb{R} -espace vectoriel et un \mathbb{C} -espace vectoriel.

5) L'application $M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ qui à une matrice associe sa transposée est linéaire.

6) L'application $M_n(K) \rightarrow K$ qui à une matrice associe sa trace est linéaire.

7) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $M_{p,n}(K)$. L'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par l'égalité

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j \right)$$

est linéaire.

8) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(K)$ inversible. L'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par l'égalité

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$$

est un automorphisme de \mathbb{R}^n .

Lemme 24. *L'application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in K$, on a*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Démonstration : Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. Si f est linéaire, on a les égalités $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Inversement, avec $\lambda = \mu = 1$, on obtient la première condition de la définition et avec $\mu = 0$, on obtient $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Corollaire 25. *Soient I un ensemble fini, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de K . Si f est linéaire, on a*

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration : On procède par récurrence sur le cardinal de I .

Lemme 26. *Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications linéaires.*

- 1) *L'application $g \circ f : E \rightarrow G$ est linéaire.*
- 2) *Si f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ aussi.*
- 3) *L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Démonstration : Les deux premières assertions sont laissées en exercice. Supposons que f soit un isomorphisme et vérifions que f^{-1} en est un. Il s'agit de prouver que f^{-1} est une application linéaire. Soient $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in F$. Parce que f est linéaire, on a

$$\lambda x + \mu y = f(\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)),$$

d'où

$$f^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y),$$

et le résultat (lemme 24).

Lemme 27. *Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.*

- 1) *L'image directe par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F .*
- 2) *L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E .*

Démonstration : Soit E' un sous-espace vectoriel de E . On a $f(0) = 0$, donc 0 appartient à $f(E')$. Considérons des éléments $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in f(E')$. Il existe u et v dans E' tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. L'application f étant linéaire, on obtient

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(u) + \mu f(v) = f(\lambda u + \mu v) \in f(E'),$$

d'où la première assertion (lemme 9). Par ailleurs, soit F' un sous-espace vectoriel de F . On a $f(0) = 0$, donc 0 appartient à $f^{-1}(F')$ (l'image réciproque de F' par f). Soient $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in f^{-1}(F')$. Par définition, $f(x)$ et $f(y)$ sont dans F' et tel est donc le cas de $\lambda f(x) + \mu f(y)$, autrement dit de $f(\lambda x + \mu y)$. Ainsi, $\lambda x + \mu y$ est dans $f^{-1}(F')$.

Définition 28. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle noyau de f , on le note $\text{Ker } f$, l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $f(x) = 0$. On appelle image de f l'ensemble $f(E)$. On la note parfois $\text{Im } f$.

Comme conséquence du lemme 27 :

Lemme 29. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Son noyau est un sous-espace vectoriel de E et son image est un sous-espace vectoriel de F .

Lemme 30. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Elle est injective si et seulement si on a $\text{Ker } f = \{0\}$.

Démonstration : Supposons f injective. Soit x un élément de $\text{Ker } f$. On a $f(x) = 0$, d'où $f(x) = f(0)$, puis $x = 0$. Inversement, supposons $\text{Ker } f = \{0\}$. Soient x et y des éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Parce que f est linéaire, on a $f(x - y) = 0$, d'où $x = y$, ce qui montre que f est injective.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in K$, on définit $f + g$ et λf par les égalités

$$(2) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in E).$$

Les applications $f + g$ et λf sont linéaires. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni, avec ces deux lois, d'une structure d'espace vectoriel sur K . C'est un cas particulier de la situation décrite dans l'alinéa 6 des exemples 3.

Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ le K -espace vectoriel formé des endomorphismes de E . Il est de plus muni d'une structure d'anneau, avec l'addition définie ci-dessus et comme loi multiplicative la composition des applications.

4. Relations linéaires

Soit E un K -espace vectoriel. Soient x_1, \dots, x_n des vecteurs de E .

Définition 31. On appelle relation linéaire entre les vecteurs x_1, \dots, x_n tout élément $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que l'on ait

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

Terminologie. On dit que $(0, \dots, 0) \in K^n$ est la relation linéaire triviale.

Définition 32 (Famille libre - Famille liée).

- 1) On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants, ou que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, s'il n'existe pas d'autre relation linéaire entre x_1, \dots, x_n que la relation linéaire triviale.
- 2) Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement dépendants, ou que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.

Dire que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre signifie donc que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, on a l'implication

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dire que la famille est liée signifie au contraire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ non nul, i.e. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls, tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

Autrement dit :

Lemme 33. La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i est combinaison linéaire des autres.

Proposition 34. Soit x un vecteur de E combinaison linéaire de x_1, \dots, x_n . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1) Il existe un unique élément $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

- 2) Les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants.

Démonstration : Supposons la première condition satisfaite. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^n$ une relation linéaire entre les x_i . On a alors

$$x = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) x_i.$$

L'hypothèse faite implique $\mu_i = 0$ pour tout i , d'où la seconde condition. Inversement, supposons qu'il existe $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans K^n tels que x soit la somme des

$\zeta_i x_i$, et la somme des $\lambda_i x_i$. La somme des $(\zeta_i - \lambda_i)x_i$ est nulle. Les vecteurs x_1, \dots, x_n étant linéairement indépendants, cela entraîne $\lambda_i = \zeta_i$ pour tout i .

Exemples 35.

1) Dans le K -espace vectoriel K^n , la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, où rappelons que $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (voir les exemples 20).

2) Soit x un élément de E . La famille (x) est libre si et seulement si x est non nul.

3) Vérifions que dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 5)$, $(4, 6, 1)$ sont linéairement indépendants. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ une relation linéaire entre ces vecteurs. On a alors

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0, \quad 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Il s'agit de montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il suffit d'établir que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

est inversible. On effectue pour cela la suite d'opérations élémentaires ci-dessous sur les lignes L_i de A . On note encore L_i les lignes des matrices déduites de A après chaque opération élémentaire.

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 8 & -11 \end{pmatrix},$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 8 & -11 \end{pmatrix}, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{3}{17}L_3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela établit notre assertion (chap. I, th. 28).

4) Dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} , la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre. C'est une conséquence du fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Vérifions ce dernier point, en supposant qu'il existe des entiers naturels a et b tels que l'on ait

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

On a alors $2b^2 = a^2$. L'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $2b^2$ est impair. L'exposant de 2 dans celle de a^2 est pair, d'où une contradiction et l'assertion. Le

fait que $\sqrt{2}$ soit irrationnel semble avoir été démontré pour la première fois par un membre de l'école philosophique de Pythagore, au cinquième siècle avant notre ère.

Passons maintenant aux notions de famille génératrice et de base de E .

Définition 36 (Famille génératrice - Système générateur). On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n engendrent E , ou que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de E , si l'on a

$$E = \text{vect} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Dans ce cas, on dit aussi que $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un système générateur de E .

Dire que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de E signifie donc que tout vecteur de E est combinaison linéaire des x_i .

Définition 37 (Base). On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n forment une base de E , ou que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , si cette famille est à la fois libre et génératrice.

Lemme 38. La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit, de façon unique, comme une combinaison linéaire des x_i .

Démonstration : Cela résulte de la proposition 34 et des définitions.

Exemples 39.

- 1) Tout élément non nul de K est une base du K -espace vectoriel K .
- 2) Dans le K -espace vectoriel K^n , la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, est une base de K^n . On dit que c'est la base canonique de K^n .
- 3) Dans le K -espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,p}(K)$, soit $E_{i,j}$ la matrice dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On dit que c'est la base canonique de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.
- 4) Les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 5)$, $(4, 6, 1)$, considérés dans l'exemple précédent, forment une base de \mathbb{R}^3 . On a vu que c'est une famille libre. Il s'agit donc de montrer que c'est une famille est génératrice de \mathbb{R}^3 , autrement dit que pour tout $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, le système

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_1, \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = b_2, \quad 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = b_3,$$

a une solution dans \mathbb{R}^3 . Tel est le cas, car la matrice $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ correspondant à ce système est inversible.

Remarquons que le fait que A soit inversible entraîne directement que ces trois vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3 (lemme 38).

Définition 40 (Coordonnées). Supposons que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une base de E . Soit x un vecteur de E . Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ unique dans K^n tel que l'on ait

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

On dit que les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées de x par rapport à la base x_1, \dots, x_n de E .

Exemples 41.

1) Pour tout $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, on a

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Les λ_i sont les coordonnées x par rapport à la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de K^n . En particulier, 1 est la i -ème coordonnée de e_i dans cette base.

2) Pour tout $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$, on a

$$M = \sum_{i,j} m_{ij} E_{i,j}.$$

Les m_{ij} sont les coordonnées M par rapport à la base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.

Il est indispensable dans certaines situations de généraliser les définitions précédentes aux cas des familles infinies. Soit I un ensemble infini.

Définition 42. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

1) On dit que les x_i sont linéairement indépendants, ou que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, si pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , à support fini, la relation

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

2) Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs x_i sont linéairement dépendants, ou que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

3) On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E si l'on a

$$E = \text{vect} \{x_i \mid i \in I\}.$$

Dans ce cas, on dit aussi que $\{x_i \mid i \in I\}$ est un système générateur de E .

4) On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E , alors pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , à support fini, telle que l'on ait (prop. 14)

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

On dit que les λ_i sont les coordonnées de x par rapport à la base $(x_i)_{i \in I}$ de E .

Exemple 43. Dans le K -espace vectoriel $K[X]$, la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base. Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont ses coefficients.

On va établir dans le paragraphe qui suit, que tout espace vectoriel possède une base. On donnera d'abord une démonstration dans le cas où E est, ce qu'on appelle, de dimension finie sur K . On présentera ensuite la démonstration en toute généralité, qui pourra être réservée en seconde lecture.

5. La notion de dimension

Soit E un espace vectoriel sur K .

1. Existence de bases en dimension finie - Définition

Définition 44. On dit que E est de dimension finie sur K s'il existe une partie finie X de E telle que l'on ait

$$E = \text{vect}(X).$$

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie sur K .

Ainsi, E est de dimension finie sur K si E possède un système générateur fini.

Théorème 45. Si E est de dimension finie sur K , alors E admet une base.

C'est une conséquence de l'énoncé plus précis suivant.

Théorème 46. Supposons E de dimension finie sur K . Soient X un système générateur fini de E et A une partie de X . Supposons que les éléments de A soient linéairement indépendants. Alors, il existe une base \mathcal{B} de E telle que l'on ait

$$A \subseteq \mathcal{B} \subseteq X.$$

Démonstration : Soit \mathcal{F} l'ensemble des parties de X , qui contiennent A , dont les éléments sont linéairement indépendants. Il est non vide car A appartient à \mathcal{F} . Puisque X est fini, il existe donc \mathcal{B} dans \mathcal{F} dont le cardinal est le plus grand possible. Il suffit d'établir que \mathcal{B} est une base de E . Par construction, les éléments de \mathcal{B} forment une famille libre de E . Démontrons qu'ils forment une famille génératrice de E .

Parce que X est un système générateur de E , tout revient à montrer que chaque $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} . On peut supposer pour cela que x n'est pas dans \mathcal{B} . Posons

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x\}.$$

On a les inclusions

$$A \subseteq \mathcal{B}' \subseteq X$$

et le cardinal de \mathcal{B}' est strictement plus grand que celui de \mathcal{B} . Il en résulte que les éléments de \mathcal{B}' forment une famille liée. Posons $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_p\}$. Il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + \lambda x = 0.$$

On a $\lambda \neq 0$, sinon $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ serait une relation linéaire non triviale entre les éléments de \mathcal{B} qui formeraient donc une famille liée. On en déduit l'égalité

$$x = -\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right).$$

Par suite, x est combinaison linéaire des éléments \mathcal{B} , d'où le résultat.

Le théorème 45 en résulte, en prenant pour A la partie vide de E .

Corollaire 47. *Supposons E de dimension finie sur K .*

1) *Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille libre d'éléments de E et X un système générateur fini de E . On peut compléter la famille des x_i en une base de E , en utilisant exclusivement des éléments de X .*

2) *Tout système générateur fini de E contient une base de E .*

Démonstration : Posons $A = \{x_1, \dots, x_r\}$. L'ensemble $X \cup A$ est a fortiori un système générateur fini de E . Il existe une base \mathcal{B} de E telle que l'on ait (th. 46)

$$A \subseteq \mathcal{B} \subseteq X \cup A.$$

Ainsi, \mathcal{B} contient tous les x_i et tout autre élément de \mathcal{B} est dans X , d'où la première assertion. La seconde est une conséquence du théorème 46 avec pour A la partie vide.

Afin de définir la notion de dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il nous faut établir l'un des résultats essentiels de la théorie :

Théorème 48. *Supposons E de dimension finie sur K . Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ deux bases de E . Il s'agit de montrer que $p = q$. On le déduit directement du résultat qui suit.

Théorème 49. *Supposons que E possède une base formée de p vecteurs. Pour que q vecteurs de E soient linéairement indépendants, il est nécessaire que l'on ait $q \leq p$.*

Démonstration : Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E et $(b_i)_{1 \leq i \leq q}$ une famille de vecteurs de E . Supposons $q > p$ et montrons que cette famille est liée, ce qui établira le résultat. On procède par récurrence sur p . C'est vrai si $p = 0$, car dans ce cas E est l'espace vectoriel nul, on a $q \geq 1$, et la relation linéaire

$$1.b_1 + 0.b_2 + \cdots + 0.b_q = 0$$

est non triviale. Supposons $p \geq 1$ et l'énoncé démontré pour l'entier $p - 1$. Posons

$$F = \text{vect} \{a_1, \dots, a_{p-1}\}.$$

Parce que les a_i engendrent E , pour tout $j = 1, \dots, q$, il existe $b'_j \in F$ et $\alpha_j \in K$ tels que l'on ait

$$b_j = b'_j + \alpha_j a_p.$$

Si tous les α_j sont nuls, alors les b_j sont dans F qui admet une base formée de $p - 1$ vecteurs. On a $q > p - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une relation linéaire non triviale entre les b_j , d'où le résultat dans ce cas.

Supposons qu'il existe un α_j non nul, par exemple $\alpha_q \neq 0$. On a alors

$$a_p = \frac{1}{\alpha_q}(b_q - b'_q).$$

Pour tout $j = 1, \dots, q - 1$, on a

$$b_j - \beta_j b_q = b'_j - \beta_j b'_q \quad \text{où} \quad \beta_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_q},$$

par suite $b_j - \beta_j b_q$ est dans F . Puisque $q - 1 > p - 1$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ non tous nuls tels que l'on ait

$$\lambda_1(b_1 - \beta_1 b_q) + \cdots + \lambda_{q-1}(b_{q-1} - \beta_{q-1} b_q) = 0.$$

On obtient l'égalité

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_q b_q = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_q = -(\lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_{q-1} \beta_{q-1}),$$

qui est une relation linéaire non triviale entre les b_i , d'où le résultat.

Le théorème 48 justifie alors la définition suivante.

Définition 50 (Dimension). *Supposons E de dimension finie sur K . La dimension de E sur K est le nombre d'éléments d'une base de E .*

Si n est la dimension de E sur K , on dit souvent que E est de dimension n sur K . On notera

$$n = \dim_K(E) \quad \text{ou} \quad n = \dim(E)$$

s'il n'y a pas de confusion possible sur le corps K . Si $n = 1$, on dit que E est une droite vectorielle. Si $n = 2$, on dit que E est un plan vectoriel.

Convention. Appelons par commodité, famille finie d'éléments de E de cardinal n , toute famille d'éléments de E indexée par un ensemble de cardinal n . Si une telle famille est libre, son image dans E est une partie de cardinal n .

Corollaire 51. *Supposons E de dimension finie n sur K .*

- 1) *Toute famille libre de E est finie de cardinal au plus n . Toute famille libre de E de cardinal n est une base.*
- 2) *Tout système générateur de E a au moins n éléments. Tout système générateur de E de cardinal n est une base.*

Démonstration : Soit \mathcal{F} une famille libre de E . On a $|\mathcal{F}| \leq n$ (th. 49). Par ailleurs, on peut compléter \mathcal{F} en une base de E (cor. 47). Si $|\mathcal{F}| = n$, on en déduit que \mathcal{F} est une base de E . La seconde assertion est aussi une conséquence du corollaire 47.

Corollaire 52. *Supposons E de dimension finie sur K . Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F est de dimension finie sur K et on a*

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, on a $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration : Posons $n = \dim(E)$. Une famille libre d'éléments de F est une famille libre de E . Son cardinal est au plus n (cor. 51). Il existe donc un plus grand entier $r \leq n$ tel que F possède une famille de r vecteurs linéairement indépendants. Notons les x_1, \dots, x_r . Vérifions que l'on a

$$F = \text{vect}(x_1, \dots, x_r).$$

Soit x un élément de F . La famille (x_1, \dots, x_r, x) est liée, il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda$ dans K , non tous nuls, tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i + \lambda x = 0.$$

On a $\lambda \neq 0$, car (x_1, \dots, x_r) est libre, donc x est combinaison linéaire de x_i , d'où l'égalité annoncée. Par suite, F est de dimension finie r . Si $r = n$, c'est une base de E , d'où $E = F$.

Corollaire 53. *Supposons E de dimension finie sur K . Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E .*

Démonstration : Soit F un sous-espace vectoriel de E . Il est de dimension finie sur K . Posons $n = \dim E$ et $p = \dim F$. Soit e_1, \dots, e_p une base de F . On a $p \leq n$ et il existe $n - p$ vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n , tels que (e_1, \dots, e_n) soit une base de E . On vérifie alors que $\text{vect} \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ est un supplémentaire de F dans E .

Exemples 54.

1) Si E est l'espace nul, sa seule base est la base vide et on a

$$\dim(E) = 0.$$

2) Le K -espace vectoriel K^n est de dimension finie et on a (exemples 39)

$$\dim(K^n) = n.$$

3) Plus généralement, soient E_1, \dots, E_r des espaces vectoriels de dimension finie sur K . Alors le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_r$ est de dimension finie sur K et on a

$$(3) \quad \dim(E_1 \times \dots \times E_r) = \sum_{i=1}^r \dim(E_i).$$

C'est vrai si $r = 1$. Supposons $r = 2$. Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ respectivement des bases de E_1 et E_2 . Alors, les $p + q$ vecteurs,

$$(a_1, 0), \dots, (a_p, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_q),$$

forment une base de $E_1 \times E_2$, d'où $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$. Le cas général s'en déduit par récurrence.

4) Le K -espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ est de dimension finie et on a (*loc. cit.*)

$$\dim(\mathbb{M}_{n,p}(K)) = np.$$

5) Le K -espace vectoriel formé des polynômes de $K[X]$, de degré au plus égal à n , est de dimension finie sur K , dont une base est $(1, X, \dots, X^n)$. Sa dimension est $n + 1$.

6) Supposons E de dimension finie sur K . Soit A une partie de E (finie ou pas). La dimension de $\text{vect}(A)$ est le nombre maximum de vecteurs de A qui sont linéairement indépendants. En effet, soient r cet entier et $B = \{x_1, \dots, x_r\}$ un sous-ensemble de A formé de r vecteurs linéairement indépendants. Soit x un élément de A . Les vecteurs x_1, \dots, x_r, x forment une famille liée, d'où l'on déduit que x est combinaison linéaire des x_i . Par suite, on a $\text{vect}(A) = \text{vect}(B)$ et $r = \dim \text{vect}(A)$.

2. Existence de bases en dimension infinie

Elle repose sur l'énoncé suivant établi par Zorn vers 1934.

Théorème 55 (Lemme de Zorn). *Soit A un ensemble ordonné non vide tel que toute partie totalement ordonnée possède un majorant dans A . Alors, A a un élément maximal.*

Expliquons cet énoncé. On suppose A muni d'une relation d'ordre \leq . Une partie B de A est dite totalement ordonnée si pour tous $x, y \in B$, on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$. Dire que B est majorée signifie qu'il existe $m \in A$ tel que pour tout $x \in B$ on ait $x \leq m$. La conclusion signifie qu'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, si l'on a $a \leq x$, alors $a = x$. Nous admettrons le lemme de Zorn qui est en fait équivalent à l'axiome du choix¹.

Une partie X de E est dite libre si la famille $(a)_{a \in X}$ l'est (cf. déf. 42), autrement dit si pour toute partie finie Y de X la famille $(a)_{a \in Y}$ est libre.

Théorème 56. *Soient S un système générateur de E et L une partie libre de E contenue dans S . Il existe une base \mathcal{B} de E telle que l'on ait $L \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

En prenant $L = \emptyset$ et $S = E$, on obtient le fait que E possède une base.

Démonstration : Soit \mathcal{L} l'ensemble des parties libres de S contenant L , que l'on ordonne par la relation d'inclusion. Il est non vide car L est dans \mathcal{L} . Soient I un ensemble et $\{L_i \mid i \in I\}$ une partie totalement ordonnée non vide de \mathcal{L} . La réunion des L_i contient L . C'est une partie libre de E . En effet, soient x_1, \dots, x_r des éléments distincts de la réunion

¹ Il peut s'énoncer comme suit. Soient A un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non vides de A indexée par un ensemble I . Il existe une application $f : I \rightarrow A$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $f(i) \in A_i$.

Si I est infini, ce qui est la situation qui justifie cet axiome, il signifie que f s'obtient en choisissant un élément x_i dans chaque A_i , d'où une infinité de choix pour construire f , sans autre précision et donc sans définition explicite de f .

On définit le produit cartésien des A_i comme étant l'ensemble des applications f de I dans A telles que pour tout $i \in I$ on ait $f(i) \in A_i$. Autrement dit, c'est l'ensemble des familles d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ de A telles que pour tout $i \in I$, on ait $x_i \in A_i$. L'axiome du choix signifie donc qu'un produit d'ensembles non vides est non vide.

des L_i et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des éléments de K tels que la somme des $\alpha_j x_j$ soit nulle. Parce que les L_i forment une partie totalement ordonnée de \mathcal{L} , il existe i_0 tel que tous les x_i soient dans L_{i_0} , donc tous les α_j sont nuls. D'après le lemme de Zorn, \mathcal{L} a donc un élément maximal \mathcal{B} . Vérifions que c'est un système générateur de E . Considérons pour cela un élément $x \in S$. Si x n'est pas dans le sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{B} , alors $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est une partie libre de E , ce qui conduit à une contradiction. Par suite, tout élément de S est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} . Puisque S est un système générateur, il en est de même de \mathcal{B} , qui est donc une base de E .

Il résulte de cet énoncé que les bases de E sont exactement les parties libres maximales, ou bien les parties génératrices minimales de E . On peut démontrer par un procédé analogue que toutes les bases d'un même espace vectoriel sont en bijection et que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

6. Isomorphisme et dimension

On va établir, qu'à isomorphisme près, le seul espace vectoriel de dimension finie n sur K est le K -espace vectoriel K^n .

Proposition 57. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur K et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Soient F un espace vectoriel sur K et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de F . Il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que l'on ait*

$$f(a_i) = b_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Elle est injective si et seulement si $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F . Elle est surjective si et seulement si $\{b_1, \dots, b_n\}$ est un système générateur de F . C'est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F .

Démonstration : D'après le lemme 38, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ unique tel que

$$(4) \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

Si f existe, on a donc nécessairement

$$(5) \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i,$$

ce qui prouve le caractère d'unicité. Par ailleurs, on vérifie directement que l'application $f : E \rightarrow F$ définie par les relations (4) et (5) est linéaire, d'où l'assertion d'existence.

Supposons f injective. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i b_i = 0.$$

Par définition de f , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i\right) = 0.$$

D'après l'hypothèse faite, la somme des $\mu_i a_i$ est nulle, d'où $\mu_i = 0$ pour tout i et le fait que $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit libre. Inversement, supposons que cette famille soit libre. Soit x un élément du noyau de f défini par (4). On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0.$$

On en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout i , d'où $x = 0$ et f est donc injective.

Par ailleurs, l'égalité $f(a_i) = b_i$ ($1 \leq i \leq n$) implique

$$f(E) = \text{vect} \{b_1, \dots, b_n\}.$$

Ainsi, on a $f(E) = F$ si et seulement $\text{vect} \{b_1, \dots, b_n\} = F$, ce qui entraîne le résultat.

Corollaire 58. *Soit E un espace vectoriel sur K . Pour qu'il soit de dimension finie sur K il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit isomorphe au K -espace vectoriel K^n . Dans ce cas, on a $\dim(E) = n$.*

Démonstration : Supposons E de dimension finie sur K . Il existe un entier n et une famille d'éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E qui soit une base de E . Il existe une application linéaire $f : E \rightarrow K^n$ telle que $f(a_i) = e_i$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de K^n (prop. 57). Parce que les e_i forment une base de K^n , l'application f est une bijection (*loc. cit.*), c'est donc un isomorphisme de E sur K^n .

Inversement, s'il existe un entier n et un isomorphisme f de K^n sur E , les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ forment une base de E , donc E est de dimension finie n sur K , d'où le résultat.

Dans l'énoncé qui suit, on en déduit que la notion de dimension classifie, à isomorphisme près, les espaces vectoriels de dimension finie sur K . C'est l'un des principaux résultats de la théorie.

Théorème 59. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur K . Pour qu'ils soient isomorphes il faut et il suffit que l'on ait $\dim(E) = \dim(F)$.*

Démonstration : Si E et F sont isomorphes, l'image d'une base de E par un isomorphisme de E sur F est une base de F , d'où $\dim(E) = \dim(F)$. Inversement, supposons que

E et F soient de même dimension n sur K . D'après le corollaire 58, E et F sont isomorphes à K^n , donc E et F sont isomorphes.

Deux espaces vectoriels isomorphes ont exactement les mêmes propriétés. L'énoncé précédent ramène donc l'étude des espaces vectoriels de dimension finie n sur K à celle du K -espace vectoriel K^n .

Remarques 60.

1) Il est faux en général que deux K -espaces vectoriels de dimension infinie sur K soient isomorphes. Par exemple, les \mathbb{Q} -espaces vectoriels $\mathbb{Q}[X]$ et \mathbb{R} sont de dimension infinie sur \mathbb{Q} ² et sont non isomorphes. En effet, $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et \mathbb{R} ne l'est pas, donc ils ne sont pas en bijection.

2) Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel de E de dimension finie ne peut être isomorphe à E que si $F = E$ (cor. 52 et th. 59). Cela est faux en dimension infinie. Soient E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par X^n avec $n \geq 1$. On a $E \neq F_n$ et l'application $E \rightarrow F_n$ qui à P associe $X^n P$ est un isomorphisme de E sur F_n . Les F_n forment une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels de E isomorphes à E .

7. Dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire

Le résultat que l'on a en vue est le suivant. On l'appelle parfois le théorème du rang.

Théorème 61. *Soient E et F des espaces vectoriels sur K et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Supposons E de dimension finie sur K . Alors, le noyau et l'image de f sont des sous-espaces vectoriels respectivement de E et F , de dimension finie sur K , et on a*

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(f(E)).$$

Démonstration : Le noyau $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . Il est de dimension finie car tel est le cas de E . Par ailleurs, si $\{x_1, \dots, x_r\}$ est un système générateur de E , alors $\{f(x_1), \dots, f(x_r)\}$ est un système générateur de $f(E)$, donc $f(E)$ est un sous-espace

² Justifions le fait que \mathbb{R} est de dimension infinie sur \mathbb{Q} . Dans le cas contraire, en notant n la dimension de \mathbb{R} sur \mathbb{Q} , le \mathbb{Q} -espace \mathbb{R} serait isomorphe à \mathbb{Q}^n . Or \mathbb{Q}^n est dénombrable et pas \mathbb{R} .

Voici une autre démonstration. Supposons \mathbb{R} de dimension finie n sur \mathbb{Q} . Considérons $n + 1$ nombres premiers distincts, p_1, \dots, p_{n+1} (on sait depuis Euclide que l'ensemble des nombres premiers est infini). Vérifions que la famille, à $n + 1$ éléments, $(\log p_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est libre, ce qui contredira l'hypothèse faite. Soit α_i des nombres rationnels tels que la somme des $\alpha_i \log p_i$ soit nulle ($1 \leq i \leq n + 1$). En multipliant cette égalité par un entier convenable, on peut supposer que les α_i sont dans \mathbb{Z} . Parce que le produit des $p_i^{\alpha_i}$ vaut 1 et que les p_i sont distincts, cela entraîne que tous les α_i sont nuls, d'où l'assertion.

vectorel de F de dimension finie. Il reste à établir la formule annoncée. Considérons pour cela une base $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $\text{Ker}(f)$ et une base $(b_i)_{1 \leq i \leq q}$ de $f(E)$. Il existe des vecteurs a_{p+1}, \dots, a_{p+q} de E tels que l'on ait

$$b_1 = f(a_{p+1}), \dots, b_q = f(a_{p+q}).$$

Il suffit de démontrer que les $p + q$ vecteurs a_1, \dots, a_{p+q} forment une base de E .

Vérifions qu'ils sont linéairement indépendants. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}$ des éléments de K tels que

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{p+q} a_{p+q} = 0.$$

En prenant l'image par f des deux membres de cette égalité, on obtient

$$\lambda_{p+1} b_1 + \dots + \lambda_{p+q} b_q = 0.$$

Parce que b_1, \dots, b_q sont linéairement indépendants, on en déduit que les λ_i sont nuls pour tout i compris entre $p + 1$ et $p + q$. On a ainsi

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0,$$

ce qui, vu que a_1, \dots, a_p sont linéairement indépendants, entraîne que les λ_i sont nuls pour tout i entre 1 et p . Cela établit notre assertion.

Vérifions que $\{a_1, \dots, a_{p+q}\}$ est un système générateur de E . Soit x un vecteur de E . Il existe des éléments μ_1, \dots, μ_q de K tels que l'on ait

$$f(x) = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_q b_q,$$

autrement dit

$$f(x) = f(\mu_1 a_{p+1} + \dots + \mu_q a_{p+q}).$$

Par suite, le vecteur

$$x - (\mu_1 a_{p+1} + \dots + \mu_q a_{p+q})$$

est dans le noyau de f , donc x est combinaison linéaire des a_i , d'où le résultat.

Corollaire 62. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur K tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est bijective.
- 2) f est surjective.
- 3) f est injective.

Démonstration : Il s'agit de vérifier que les conditions 2 et 3 sont équivalentes. Si f surjective i.e. si $f(E) = F$, le noyau de f est nul (th. 61) i.e. f est injective. De même, si f est injective, on a les égalités (*loc. cit.*)

$$\dim(F) = \dim(E) = \dim(f(E)),$$

d'où $f(E) = F$.

Remarque 63. Cela est faux en dimension infinie. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme de E , qui à P associe XP , est injectif et non surjectif. L'endomorphisme de E , qui à un polynôme associe son polynôme dérivé, est surjectif et non injectif.

Corollaire 64. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K . Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . On a

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Démonstration : Soit $f : F \times G \rightarrow E$ l'application définie pour tout $(x, y) \in F \times G$, par l'égalité

$$f((x, y)) = x + y.$$

C'est une application linéaire dont l'image est $F + G$. Son noyau est formé des éléments $(x, -x)$ où $x \in F \cap G$. L'application $F \cap G \rightarrow \text{Ker}(f)$ qui à x associe $(x, -x)$ est donc un isomorphisme, d'où $\dim(F \cap G) = \dim(\text{Ker}(f))$, puis l'égalité annoncée.

Exemple 65. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par l'égalité

$$f((x, y, z)) = (y + z, x).$$

Son noyau est l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y + z = x = 0$, c'est donc la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par $(0, 1, -1)$. Il en résulte que f est une surjection sur \mathbb{R}^2 (th. 61).

8. Matrice d'une application linéaire

1. Généralités

Soient E et F des espaces vectoriels sur K de dimension finie. Posons

$$\dim(E) = p \quad \text{et} \quad \dim(F) = n.$$

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Pour tout $j = 1, \dots, p$, il existe des scalaires α_{ij} tels que l'on ait

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} f_i.$$

Définition 66. On appelle matrice de u relative aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , la matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est α_{ij} .

Notation. On notera $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ la matrice de u relative aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .

Terminologie. On dit que $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ représente u dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .

Il faut retenir que la j -ième colonne de $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est formée des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_F .

Exemples 67.

1) Notons Id_E l'application identique de E . On a

$$\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = I_p.$$

2) Reprenons l'exemple 65. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' les bases canoniques respectivement de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 . On a

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K définie par les relations (2).

Lemme 68. Soient $u' : E \rightarrow F$ une application linéaire et λ un scalaire. On a

$$\text{Mat}(u + u', \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \text{Mat}(u', \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F),$$

$$\text{Mat}(\lambda u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Démonstration : Cela résulte directement des définitions.

Considérons un espace vectoriel G de dimension finie q sur K et $v : F \rightarrow G$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G .

Lemme 69 (Composition). Dans $\mathbb{M}_{q,p}(K)$, on a l'égalité

$$\text{Mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Démonstration : On constate d'abord que les deux membres appartiennent à $\mathbb{M}_{q,p}(K)$. Soit j un entier entre 1 et p . On a

$$v \circ u(e_j) = v\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v(f_i).$$

Notons $\beta_{k\ell}$ l'élément de la k -ième ligne et de la ℓ -ième colonne de la matrice de v relative aux bases \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G . Pour tout $i = 1 \dots, n$, on a alors

$$v(f_i) = \sum_{k=1}^q \beta_{ki} g_k.$$

On obtient l'égalité

$$v \circ u(e_j) = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ki} \alpha_{ij} \right) g_k.$$

L'élément de la k -ième ligne ($1 \leq k \leq q$) et de la j -ième colonne ($1 \leq j \leq p$) de la matrice $\text{Mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)$ est donc

$$\sum_{i=1}^n \beta_{ki} \alpha_{ij}.$$

Par définition du produit matriciel, c'est celui de la k -ième ligne et de la j -ième colonne de $\text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, d'où le résultat.

Lemme 70 (Écriture matricielle). Soient x un vecteur de E et y un vecteur de F . Posons

$$A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \in \mathbb{M}_{n,p}(K), \quad x = \sum_{i=1}^p x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j f_j,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{p,1}(K) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(K).$$

On a l'équivalence

$$y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX.$$

Démonstration : Posons $A = (\alpha_{ij})$. L'égalité $y = u(x)$ signifie que l'on a

$$\sum_{j=1}^n y_j f_j = \sum_{i=1}^p x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^p x_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} f_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \alpha_{ji} x_i \right) f_j.$$

Par suite, on a $y = u(x)$ si et seulement si pour tout j entre 1 et n , on a

$$y_j = \sum_{i=1}^p \alpha_{ji} x_i,$$

d'où l'assertion.

2. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ - Matrices inversibles

Soient E et F des espaces vectoriels sur K de dimension respectivement p et n sur K . Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases de E et F . On dispose de l'application

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{M}_{n,p}(K)$$

définie pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par

$$\Phi(u) = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Lemme 71. *L'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.*

Démonstration : Le fait que Φ soit une application linéaire résulte du lemme 68. Son noyau est nul, donc Φ est injective. Posons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. D'après la proposition 57, il existe une application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que, pour tout j entre 1 et p , on ait

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i.$$

Par définition, A est la matrice de u relative aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , d'où $\Phi(u) = A$. Ainsi Φ est une surjection, d'où l'assertion.

Remarque 72. L'isomorphisme Φ n'est pas canonique, au sens où il dépend du choix d'une base de E et d'une base de F .

Corollaire 73. *Le K -espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie np .*

Démonstration : Cela résulte du lemme précédent.

Lemme 74. *Supposons $n = p$. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. C'est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible dans $\mathbb{M}_n(K)$.*

Démonstration : Supposons que u soit un isomorphisme de E sur F . Il existe alors $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que l'on ait

$$u \circ v = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad v \circ u = \text{Id}_E.$$

On a donc dans $\mathbb{M}_n(K)$ les égalités (lemme 69)

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = I_n,$$

par suite, $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible.

Inversement, supposons qu'il existe $M \in \mathbb{M}_n(K)$ tel que

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)M = M \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = I_n.$$

Il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que l'on ait $\text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = M$ (lemme 71). On obtient

$$\text{Mat}(u \circ v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F) = \text{Mat}(v \circ u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = I_n.$$

On en déduit que l'on a $u \circ v = \text{Id}_F$ et $v \circ u = \text{Id}_E$, donc u est un isomorphisme.

2.1. Cas où $E = K^p$ et $F = K^n$

Notons \mathcal{B} la base canonique K^p et \mathcal{B}' celle de K^n . Ces bases privilégiées dans K^p et K^n permettent d'identifier canoniquement $\mathcal{L}(K^p, K^n)$ et $\mathbb{M}_{n,p}(K)$, via l'application

$$\Phi : \mathcal{L}(K^p, K^n) \rightarrow \mathbb{M}_{n,p}(K)$$

définie par

$$\Phi(u) = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Notons

$$L : \mathbb{M}_{n,p}(K) \rightarrow \mathcal{L}(K^p, K^n)$$

l'application réciproque de Φ . Par définition, pour tout $A \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$,

$$L(A) : K^p \rightarrow K^n$$

est l'application linéaire de K^p dans K^n , dont la matrice relative aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de K^p et K^n est A .

Lemme 75. *Supposons $n = p$. Pour tous A et B dans $\mathbb{M}_n(K)$, on a*

$$L(AB) = L(A) \circ L(B).$$

Démonstration : On a (lemme 69)

$$\Phi(L(A) \circ L(B)) = \Phi(L(A))\Phi(L(B)) = AB = \Phi(L(AB)),$$

d'où le résultat car Φ est une injection.

2.2. Matrices inversibles

On obtient à ce stade le théorème 13 annoncé dans le chapitre I.

Théorème 76. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible.
- 2) tA est inversible.
- 3) $L(A)$ est un automorphisme de K^n .
- 4) Les vecteurs colonnes de A forment une base de K^n .
- 5) Les vecteurs lignes de A forment une base de K^n .
- 6) Il existe $B \in \mathbb{M}_n(K)$ tel que $AB = I_n$ (A est inversible à droite).
- 7) Il existe $C \in \mathbb{M}_n(K)$ tel que $CA = I_n$ (A est inversible à gauche).

Démonstration : Vérifions l'équivalence 1) \iff 2) : si A est inversible, il existe B dans $\mathbb{M}_n(K)$ tel que l'on ait $AB = BA = I_n$. On a donc ${}^t(AB) = {}^t(BA) = I_n$, d'où ${}^tB{}^tA = {}^tA{}^tB = I_n$. Ainsi tA est inversible, d'inverse tB . Inversement, cet argument montre que si tA est inversible, alors la matrice transposée de tA , qui n'est autre que A , l'est aussi.

L'équivalence 1) \iff 3) résulte du lemme 74. L'équivalence 3) \iff 4) se déduit de la proposition 57. Les conditions 1 et 4 étant équivalentes, il en est donc de même des conditions 2 et 5.

Vérifions que la condition 6 (resp. 7) entraîne la première condition. Supposons qu'il existe B dans $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $AB = I_n$. On a (lemme 75)

$$L(A) \circ L(B) = L(I_n) = \text{Id}_{K^n}.$$

Cela entraîne que $L(A)$ est surjectif. Par suite, $L(A)$ est donc bijectif (cor. 62), autrement dit $L(A)$ est un automorphisme de K^n , d'où le fait que A soit inversible.

De même, s'il existe C dans $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $CA = I_n$, on a $L(C) \circ L(A) = \text{Id}_{K^n}$, ainsi $L(A)$ est injective, donc est bijective (*loc. cit.*) et A est inversible. Cela termine la démonstration du théorème.

3. Matrices de passage

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Considérons deux bases de E

$$\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_E = (e'_1, \dots, e'_n).$$

Définition 77. On appelle matrice de passage de la base \mathcal{B}_E à la base \mathcal{B}'_E la matrice $P \in \mathbb{M}_n(K)$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}'_E dans la base \mathcal{B}_E . Plus précisément, en notant $P = (p_{ij})$, on a pour tout $j = 1, \dots, n$ l'égalité

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i.$$

Lemme 78. La matrice $P \in \mathbb{M}_n(K)$ est inversible. De plus, P^{-1} est la matrice de passage de la base \mathcal{B}'_E à la base \mathcal{B}_E .

Démonstration : Les vecteurs colonnes de P forment une base de E , donc l'endomorphisme u de E tel que $P = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ est un isomorphisme (prop. 57). On en déduit que P est inversible (lemme 74). Soit $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ l'identité de E . Par définition, on a

$$P = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E).$$

La matrice de passage de la base \mathcal{B}'_E à la base \mathcal{B}_E est

$$Q = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E).$$

On a (lemme 69)

$$PQ = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = I_n,$$

d'où $Q = P^{-1}$ et le résultat.

Remarque 79. Toute matrice inversible $A \in \mathbb{M}_n(K)$ est la matrice de passage de la base canonique de K^n à la base formée des vecteurs colonnes de A .

4. Formules de changement de bases

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et deux bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E . Soit x un vecteur de E . Posons

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(K), \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(K).$$

Lemme 80. Soit P la matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B}'_E . On a

$$X = PX'.$$

Démonstration : Posons $P = (p_{ij})$. On a les égalités

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i,$$

d'où pour tout i entre 1 et n l'égalité

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j,$$

et le résultat.

Passons maintenant à la formule de changement de bases entre les matrices d'une application linéaire.

Soient F un espace vectoriel de dimension finie sur K et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Proposition 81. Soient P la matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B}'_E et Q la matrice de passage de \mathcal{B}_F à \mathcal{B}'_F . On a

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = Q^{-1} \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) P.$$

Donnons deux démonstrations de cet énoncé. Posons

$$M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \quad \text{et} \quad M' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F).$$

1) On écrit que l'on a

$$\text{Id}_F \circ u = u \circ \text{Id}_E.$$

Par ailleurs, on a

$$\text{Mat}(\text{Id}_F \circ u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F) = Q M' \quad \text{et} \quad \text{Mat}(u \circ \text{Id}_E, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F) = M P,$$

d'où $Q M' = M P$ et le résultat.

2) Soient x un vecteur de E et X, X' les vecteurs colonnes formés des coordonnées de x dans \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E . Posons

$$Y = M X, \quad Y' = M' X'.$$

On a (lemme 80)

$$X = P X' \quad \text{et} \quad Y = Q Y'.$$

On obtient les égalités

$$Y' = Q^{-1} Y = Q^{-1} M X = Q^{-1} M P X',$$

d'où

$$M' X' = Q^{-1} M P X'$$

pour tout $X' \in \mathbb{M}_{n,1}(K)$. En prenant pour X' les vecteurs colonnes

$$X' = {}^t(1 \ 0 \ \cdots \ 0), \dots, X' = {}^t(0 \ 0 \ \cdots \ 1),$$

on en déduit l'égalité $M' = Q^{-1} M P$.

Si $E = F$, on note plus simplement

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E)$$

la matrice $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$. Dans ce cas, ce qui précède se résume comme suit.

Corollaire 82. Soient $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E , \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E des bases de E . Soit P la matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B}'_E . On a l'égalité

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}'_E) = P^{-1} \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E) P.$$

5. Relations binaires dans $\mathbb{M}_{n,p}(K)$

Pour tout entier n , notons $\mathbb{GL}_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathbb{M}_n(K)$. Les résultats précédents conduisent aux définitions suivantes.

Définition 83 (Équivalence). Soient A et B des matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On dit que A est équivalente à B , et on écrit $A \sim B$, s'il existe $P \in \mathbb{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathbb{GL}_p(K)$ tels que l'on ait

$$B = PAQ.$$

Lemme 84. La relation binaire \sim est une relation d'équivalence sur $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.

Démonstration : On a $A = I_n A I_p$, donc \sim est réflexive. S'il existe $P \in \mathbb{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathbb{GL}_p(K)$ tels que $B = PAQ$, on a $A = P^{-1} B Q^{-1}$, donc \sim est symétrique. Soient A, B, C dans $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ tels que $A \sim B$ et $B \sim C$. Il existe $P, P' \in \mathbb{GL}_n(K)$ et $Q, Q' \in \mathbb{GL}_p(K)$ tels que $B = PAQ$ et $C = P' B Q'$. On obtient $C = (P' P) A (Q Q')$, d'où $A \sim C$ et la relation \sim est transitive.

Lemme 85. Soient A et B des matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. Elles sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire de K^p dans K^n après changement de bases.

Démonstration : Supposons A et B équivalentes. Posons $f = L(A) : K^p \rightarrow K^n$ l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques \mathcal{B}_p et \mathcal{B}_n de K^p et K^n . Il existe $P \in \mathbb{GL}_n(K)$ et $Q \in \mathbb{GL}_p(K)$ tels que $B = PAQ$. Posons $R = P^{-1}$. Alors, R est la matrice de passage de \mathcal{B}_n à une base \mathcal{B}'_n de K^n et Q est la matrice de passage de \mathcal{B}_p à une base de \mathcal{B}'_p de K^p . On a (prop. 81)

$$B = \text{Mat}(f, \mathcal{B}'_p, \mathcal{B}'_n),$$

donc B représente f après un changement de bases. L'implication réciproque résulte directement de la proposition 81.

Définition 86 (Similitude). Soient A et B des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$. On dit que A est semblable à B s'il existe $P \in \mathbb{GL}_n(K)$ tel que l'on ait

$$B = P^{-1}AP.$$

Cette relation binaire dans $\mathbb{M}_n(K)$ s'appelle la relation de similitude. On montre comme ci-dessus :

Lemme 87. La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathbb{M}_n(K)$.

Compte tenu du lemme 85, on obtient :

Lemme 88. Soient A et B des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$. Elles sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme de K^n dans deux bases de K^n .

Rappelons que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux.

Lemme 89. Deux matrices semblables de $\mathbb{M}_n(K)$ ont la même trace.

Démonstration : Soient A et B des matrices semblables de $\mathbb{M}_n(K)$. Il existe P dans $\mathbb{M}_n(K)$ inversible tel que $B = P^{-1}AP$. On obtient (chap. I, lemme 6)

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

Le lemme précédent et le corollaire 82 justifient la définition suivante :

Définition 90. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur K . La trace de u , notée $\text{Tr}(u)$, est la trace de n'importe quelle matrice qui représente u dans une base de E .

Exemple 91. Posons dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 6 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 13 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elles ne sont pas semblables car A est inversible, on a $\det(A) = -59$, et B ne l'est pas, son déterminant est nul.

9. La notion de rang

Il y a trois notions de rang. Le rang d'un système de vecteurs, le rang d'une matrice et celui d'une application linéaire.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 92. Soient v_1, \dots, v_s des vecteurs de E . Le rang du système $\{v_1, \dots, v_s\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par les v_i .

Compte tenu de l'alinéa 6 des exemples 54 :

Lemme 93. Le rang du système $\{v_1, \dots, v_s\}$ est le nombre maximum de vecteurs v_i linéairement indépendants.

Définition 94. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. Le rang de A est le rang dans K^n du système de ses p vecteurs colonnes.

D'après le lemme précédent :

Lemme 95. Le rang de A est le nombre maximum de ses vecteurs colonnes dans K^n qui sont linéairement indépendants.

On notera $r(A)$ le rang de A . Par exemple, si les vecteurs colonnes de A forment une famille libre, on a $r(A) = p$.

Lemme 96. Pour tout $A \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$, on a $r(A) \leq \min(n, p)$.

Démonstration : Notons C_1, \dots, C_p les p vecteurs colonnes de A . Par définition, la dimension du sous-espace vectoriel F de K^n engendré par les C_i est inférieure ou égale à p . Par ailleurs, on a $\dim F \leq n$, d'où le lemme.

Définition 97. Soient F un K -espace vectoriel et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le rang de f est la dimension de son image.

Cette définition a un sens vu que $f(E)$ est de dimension finie sur K (th. 61).

Lemme 98. Soient F un K -espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le rang de f est le rang de n'importe quelle matrice représentant f dans des bases de E et F .

Démonstration : Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases de E et F , et A la matrice qui représente f dans ces bases. On a

$$\text{vect } f(\mathcal{B}_E) = f(E),$$

d'où $r(A) = \dim f(E)$.

Corollaire 99. Soient A, B des matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. Si A et B sont équivalentes, on a $r(A) = r(B)$.

Démonstration : Cela résulte des lemmes 85 et 98.

Théorème 100. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On a $r(A) = r$ si et seulement si A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix},$$

dans laquelle $0_{i,j}$ désigne la matrice nulle ayant i lignes et j colonnes.

Démonstration : Supposons $r(A) = r$. Posons $f = L(A) : K^p \rightarrow K^n$ l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques de K^p et K^n . On a (th. 61)

$$\dim \text{Ker } f = p - r.$$

Soit (e_{r+1}, \dots, e_p) une base de $\text{Ker } f$. Complétons cette base en une base de K^p

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p).$$

Posons

$$F = \text{vect} \{e_1, \dots, e_r\} \quad \text{et} \quad u_k = f(e_k) \text{ pour } k = 1, \dots, r.$$

On a

$$\text{Ker } f \cap F = \{0\},$$

la restriction de f à F est donc un isomorphisme de F sur $f(F)$. Par suite, (u_1, \dots, u_r) est une base de $f(F)$. En particulier, il existe des vecteurs u_{r+1}, \dots, u_n de K^n tels que

$$\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

soit une base de K^n . Posons

$$T_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = T_r,$$

d'où l'on déduit que A et T_r sont équivalentes (lemme 85). Inversement, on a $r(T_r) = r$, donc si A est équivalente à T_r , on obtient $r(A) = r$ (cor. 99), d'où le résultat.

Remarque 101. On retrouve le fait qu'une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$ est équivalente à I_n , résultat établi dans le chapitre I par une autre méthode.

Corollaire 102. Deux matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration : Deux matrices de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ de même rang r sont équivalentes à la matrice T_r (th. 100). Elles sont donc équivalentes. L'implication réciproque a déjà été établie.

Corollaire 103. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. On a $r(A) = r({}^t A)$.

Démonstration : Posons $r(A) = r$. Les matrices A et T_r sont équivalentes. Il en est donc de même de ${}^t A$ et ${}^t T_r$ dans $M_{p,n}(K)$. Le rang de ${}^t T_r$ est r , d'où le résultat.

Corollaire 104. Le rang de A est le nombre maximum de ses vecteurs lignes dans K^p qui sont linéairement indépendants.

Exemple 105. Posons dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 16 \\ -10 & 8 & 29 \end{pmatrix}.$$

Déterminons son rang. On vérifie que $\det(A) = 0$, donc A n'est pas inversible. Les vecteurs colonnes C_1, C_2, C_3 de A sont donc linéairement dépendants (th. 76), d'où $r(A) \leq 2$. Par ailleurs, on vérifie que C_1 et C_2 sont linéairement indépendants, d'où $r(A) = 2$ (lemme 95). Déterminons deux matrices inversibles $P, Q \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}AP.$$

De telles matrices existent. Suivons la démonstration du théorème 100. Posons $f = L(A)$. C'est l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté par A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a $\dim \text{Ker } f = 1$ (th. 61) et on vérifie que

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(e_3) \quad \text{où} \quad e_3 = (3, 11, -2).$$

On complète e_3 en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 en prenant par exemple

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 0, 1).$$

On a

$$u_1 = f(e_1) = (5, 24, 27), \quad u_2 = f(e_2) = (5, 23, 19).$$

En posant $u_3 = (1, 0, 0)$,

$$\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$$

est une base de \mathbb{R}^3 . On a ainsi

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit P (resp. Q) la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}'). On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 24 & 23 & 0 \\ 27 & 19 & 0 \end{pmatrix},$$

et d'après la proposition 81, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}AP.$$

À titre indicatif, on a

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{19}{165} & \frac{23}{165} \\ 0 & \frac{55}{8} & -\frac{55}{8} \\ 1 & -\frac{8}{33} & \frac{1}{33} \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier, avec le produit matriciel, l'égalité obtenue.