

Chapitre III - Déterminants

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K . On introduit dans ces notes la notion de forme n -linéaire alternée sur E . Cela nécessite quelques connaissances sur le groupe \mathbb{S}_n des bijections d'un ensemble à n éléments. Signalons au passage que, indépendamment de notre programme, l'étude du groupe \mathbb{S}_n est d'une importance considérable dans de nombreux domaines en mathématiques. Notre objectif étant d'exposer la théorie des déterminants, on se limitera principalement au cas où E est de dimension finie n . La notion de déterminant, qui semble être apparue au XVI^e siècle, est très utile en algèbre linéaire. Elle fut développée à l'origine pour résoudre les systèmes linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. On donnera des applications de la théorie au calcul du rang d'une matrice et à la géométrie vectorielle. On décrira par ailleurs une méthode permettant de résoudre les systèmes de n équations linéaires à p inconnues, en établissant le théorème de Rouché-Fontené, datant de la seconde moitié du XIX^e siècle. Cela permet de ramener la résolution des systèmes linéaires généraux à celle des systèmes de Cramer, que l'on a rencontrés dans le premier chapitre. On verra à ce sujet une méthode de résolution de ces systèmes, utilisant des formules en termes de déterminants.

Table des matières

1. Le K -espace vectoriel $\mathcal{L}^n(E, K)$	2
2. Le groupe symétrique \mathbb{S}_n	4
3. Le K -espace vectoriel $\mathcal{A}^n(E, K)$	7
4. Cas où $\dim E = n$ - La droite $\mathcal{A}^n(E, K)$	9
5. Les trois notions de déterminant	12
6. Règles de calculs	17
7. Comatrice	21
8. Étude du rang d'une matrice	23
9. Géométrie vectorielle	26
10. Formules de Cramer	28
11. Systèmes d'équations linéaires	29

1. Le K -espace vectoriel $\mathcal{L}^n(E, K)$

1. Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et E_1, \dots, E_n des ensembles. Posons

$$X = E_1 \times \dots \times E_n.$$

Soit $f : X \rightarrow K$ une application. On dit que f est une application de n variables.

Définition 1 (Application partielle en un point). Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de X . Soit i un entier compris entre 1 et n . On appelle application partielle de numéro i de f au point a , l'application $f_{a,i} : E_i \rightarrow K$ définie pour tout $t \in E_i$ par l'égalité

$$f_{a,i}(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = xy + x^2yz$. Les trois applications partielles de f au point $(0, 0, 0)$ sont nulles.

Supposons que les E_i soient des espaces vectoriels sur K .

Définition 3 (Forme n -linéaire). On dit que f est une forme n -linéaire si pour tout point $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$ et tout i entre 1 et n , l'application partielle $f_{a,i} : E_i \rightarrow K$ est une application linéaire de E_i dans K .

Dire que f est n -linéaire signifie donc que pour tous $x, y \in E_i$ et $\lambda, \mu \in K$, l'élément $f(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda x + \mu y, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est la somme de $\lambda f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ et $\mu f(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)$. On en déduit :

Lemme 4. Soient $f : X \rightarrow K$ une forme n -linéaire et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de X .

1) Pour tout $\lambda \in K$, on a $f(\lambda a) = \lambda^n f(a)$.

2) Si l'un des a_i est nul, on a $f(a) = 0$.

Remarque 5. Si on a $n \geq 2$, une forme n -linéaire de X dans K n'est pas une application linéaire de l'espace vectoriel produit X à valeurs dans K . En fait, tel est le cas que si cette forme est nulle : supposons $f : X \rightarrow K$ à la fois n -linéaire et linéaire. Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de X . Posons $b = (0, a_2, \dots, a_n)$ et $c = (a_1, 0, \dots, 0)$. On a $a = b + c$, et f étant linéaire on a $f(a) = f(b) + f(c)$. Par ailleurs, f étant n -linéaire, on a $f(b) = f(c) = 0$ (lemme 4), d'où $f(a) = 0$ et l'assertion.

Supposons désormais tous les E_i égaux à un même espace vectoriel E . L'ensemble X est donc le produit cartésien de n copies de E i.e. on a $X = E^n$.

Notation. On a notera $\mathcal{L}^n(E, K)$ l'ensemble des formes n -linéaires de E^n à valeurs dans K .

On vérifie l'énoncé suivant (exercice) :

Lemme 6. *L'ensemble $\mathcal{L}^n(E, K)$ est muni d'une structure de K -espace vectoriel en posant par définition, pour tous $f, g \in \mathcal{L}^n(E, K)$,*

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a) \quad (a \in E^n, \lambda \in K).$$

On dit que $\mathcal{L}^n(E, K)$ est le K -espace vectoriel des formes n -linéaires sur E .

2. Cas où E est de dimension finie

Supposons E de dimension finie p sur K . Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Considérons un élément (x_1, \dots, x_n) de E^n . Pour tout $k = 1, \dots, n$, il existe des scalaires $a_{i_k k}$ tels que on ait

$$(1) \quad x_k = \sum_{i_k=1}^p a_{i_k k} e_{i_k}.$$

Notation. Étant donné $m \in \mathbb{N}$, on désignera dans la suite par $[1, m]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et m .

Soit $f : E^n \rightarrow K$ une forme n -linéaire. On a

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^p a_{i_1 1} e_{i_1}, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{i_1=1}^p a_{i_1 1} f(e_{i_1}, x_2, \dots, x_n).$$

Après n opérations identiques, on obtient l'égalité

$$(2) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in [1, p]^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Par suite, f est entièrement déterminée par les p^n éléments $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$. On en déduit l'énoncé suivant :

Lemme 7. *Les K -espaces vectoriels $\mathcal{L}^n(E, K)$ et K^{p^n} sont isomorphes. En particulier, on a $\dim \mathcal{L}^n(E, K) = p^n$.*

Démonstration : Notons F le K -espace vectoriel formé des applications du produit de n copies de \mathcal{B}_E à valeurs dans K . L'application $\mathcal{L}^n(E, K) \rightarrow F$ qui à tout $f \in \mathcal{L}^n(E, K)$ associe la restriction de f à $\mathcal{B}_E \times \cdots \times \mathcal{B}_E$ est linéaire, par définition des structures des

K -espaces vectoriels $\mathcal{L}^n(E, K)$ et F . D'après la formule (2), elle est injective. Vérifions qu'elle est surjective. Soit $h : \mathcal{B}_E \times \cdots \times \mathcal{B}_E \rightarrow K$ un élément de F . En reprenant les notations de (1), l'application $f : E^n \rightarrow K$ définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in [1, p]^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} h(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

est n -linéaire et a pour image h , d'où l'assertion. Les K -espaces vectoriels $\mathcal{L}^n(E, K)$ et F sont donc isomorphes. Par ailleurs, F est isomorphe à K^{p^n} , d'où le lemme¹.

2. Le groupe symétrique \mathbb{S}_n

Soit n un entier naturel.

Définition 8. On appelle groupe symétrique de numéro n , noté \mathbb{S}_n , le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Le groupe \mathbb{S}_n est fini de cardinal $n!$. Les éléments de \mathbb{S}_n s'appellent des permutations.

Notation. Tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est déterminé par la donnée d'un n -uplet de $[1, n]$, à savoir $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$. On note souvent

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On désignera par Id_n l'identité de \mathbb{S}_n .

Définition 9 (Transposition). Soit $\{i, j\}$ une partie à deux éléments de $[1, n]$. On appelle transposition associée à $\{i, j\}$, notée (i, j) , la bijection dans \mathbb{S}_n définie par $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour tout k distinct de i et j .

Théorème 10. Le groupe \mathbb{S}_n est engendré par les transpositions. Autrement dit, toute permutation de \mathbb{S}_n peut s'écrire comme un produit de transpositions.

Démonstration : L'énoncé est vrai pour $n \leq 2$. Supposons qu'il le soit pour un entier $n \geq 2$. Il s'agit d'établir qu'il l'est aussi pour l'entier $n + 1$. Considérons pour cela un élément σ de \mathbb{S}_{n+1} .

Distinguons deux cas :

¹ Soit X un ensemble fini de cardinal r . Posons $X = \{a_1, \dots, a_r\}$. Rappelons que K^X désigne le K -espace vectoriel des applications de X à valeurs dans K , dont on a défini la structure dans le chapitre I. L'application $K^X \rightarrow K^r$ qui à tout $f \in K^X$ associe le r -uplet $(f(a_1), \dots, f(a_r))$ est un isomorphisme de K -espaces vectoriels. En particulier, on a $\dim K^X = r$.

- 1) Supposons $\sigma(n+1) = n+1$. Soit σ_1 la restriction de σ à $[1, n]$. C'est un élément de \mathbb{S}_n . Il existe donc des transpositions τ_1, \dots, τ_p de \mathbb{S}_n telles que $\sigma_1 = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$. On en déduit l'égalité $\sigma = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_p$ où $\tau'_i \in \mathbb{S}_{n+1}$ est la transposition dont la restriction à $[1, n]$ est τ_i . (Notons que par définition, τ'_i fixe $n+1$.)
- 2) Supposons $\sigma(n+1) \neq n+1$. Posons $\sigma(n+1) = k$. Le produit $(k, n+1)\sigma$ fixe $n+1$. Par suite, $(k, n+1)\sigma$ est un produit de transpositions de \mathbb{S}_{n+1} . Parce que l'on a $(k, n+1)^2 = \text{Id}_n$, il en est donc de même de σ , d'où le résultat.

Exemple 11. Voyons sur un exemple une méthode permettant d'explicitier une décomposition de toute permutation en produit de transpositions. Prenons

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_6.$$

On écrit que l'on a

$$(6, 3)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad (1, 5)(6, 3)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(1, 4)(1, 5)(6, 3)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (2, 3)(1, 4)(1, 5)(6, 3)\sigma = \text{Id}_6.$$

On obtient

$$\sigma = (6, 3)(1, 5)(1, 4)(2, 3).$$

Une telle décomposition n'est pas unique. Par exemple, on a $\sigma = (1, 4)(4, 5)(2, 6)(6, 3)^2$.

Cela étant, on va voir que dans toute décomposition d'une permutation en produit de transpositions, la parité du nombre de transpositions intervenant dans un tel produit ne change pas (voir le cor. 17).

Définition 12 (Signature). Soit σ une permutation de \mathbb{S}_n

1) Soit $\{i, j\}$ une partie à deux éléments de $[1, n]$. On dit que $\{i, j\}$ présente une inversion pour σ si on a

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0.$$

² Voici comment on peut trouver cette décomposition. Soit i_1, \dots, i_k des entiers distincts entre 1 et n . On appelle cycle de longueur k dans \mathbb{S}_n , et on note (i_1, \dots, i_k) , la permutation de $\sigma \in \mathbb{S}_n$ telle que $\sigma(i_j) = i_{j+1}$, $\sigma(i_k) = i_1$, et que $\sigma(a) = a$ si a est distinct des i_j . On dit que les i_j forment le support du cycle. Une transposition est un cycle de longueur 2. On peut démontrer que toute permutation est un produit de cycles à supports disjoints. Dans notre exemple, on a $\sigma = (1, 4, 5)(2, 6, 3)$. Par ailleurs, on a $(1, 4, 5) = (1, 4)(4, 5)$ et $(2, 6, 3) = (2, 6)(6, 3)$, d'où la décomposition annoncée.

2) On appelle signature σ , notée $\varepsilon(\sigma)$, le nombre

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^\mu,$$

où μ est le nombre de paires en inversion.

Notons \mathcal{P}_2 l'ensemble des parties à deux éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Lemme 13. Soit σ une permutation de \mathbb{S}_n . On a

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Démonstration : On a

$$\left| \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right| = 1.$$

On a donc

$$\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \pm 1.$$

Le signe est donné par le nombre de fractions $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ négatives intervenant dans ce produit, d'où le lemme.

Remarque 14. Signalons au passage que le produit des entiers $i - j$, pour $\{i, j\} \in \mathcal{P}_2$, n'a pas de sens.

Théorème 15. Supposons $n \geq 2$. L'application $\varepsilon : \mathbb{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$, qui à toute permutation de \mathbb{S}_n associe sa signature, est un morphisme de groupes surjectif.

Démonstration : Soient σ, τ des éléments de \mathbb{S}_n . Il s'agit de vérifier que l'on a

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

On a

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{i - j} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}.$$

On a

$$\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} = \prod_{\{i',j'\} \in \mathcal{P}_2} \frac{\sigma(i') - \sigma(j')}{i' - j'}$$

d'où la formule annoncée. Démontrons que ε est une surjection. On a $\varepsilon(\text{Id}_n) = 1$. Par ailleurs, la signature de la transposition $(1, 2)$ est -1 . En effet, soit $\{i, j\}$ un élément de \mathcal{P}_2 . Si $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$, on vérifie que l'on a

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} > 0,$$

sinon ce rapport vaut -1 . Par suite, $\{1, 2\}$ est la seule paire en inversion pour σ , d'où le résultat.

Corollaire 16. *La signature de toute transposition est -1 .*

Démonstration : Soit (i, j) une transposition de \mathbb{S}_n . Il existe σ unique dans \mathbb{S}_n tel que l'on ait $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$. On a l'égalité

$$\sigma \circ (1, 2) \circ \sigma^{-1} = (i, j),$$

d'où l'assertion car ε est un morphisme de groupes et la signature de $(1, 2)$ est -1 .

Corollaire 17. *Soit σ un élément de \mathbb{S}_n . Si σ s'écrit comme un produit de p transpositions, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.*

Remarque 18. On peut ainsi déterminer la signature d'un élément de \mathbb{S}_n en explicitant une de ses décompositions en produit de transpositions.

Exemples 19.

- 1) La signature de la permutation de \mathbb{S}_6 intervenant dans l'exemple 11 est 1.
- 2) La signature d'un cycle de longueur k (voir page 5) est $(-1)^{k-1}$. En effet, on a

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k).$$

3. Le K -espace vectoriel $\mathcal{A}^n(E, K)$

Soit E un K -espace vectoriel.

Définition 20 (Alternance). *Soit f une forme n -linéaire sur E . On dit que f est alternée si la condition suivante est satisfaite : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Notation. On notera $\mathcal{A}^n(E, K)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Lemme 21. *L'ensemble $\mathcal{A}^n(E, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^n(E, K)$.*

Lemme 22. Soient f une forme n -linéaire alternée sur E et x_1, \dots, x_n des vecteurs de E linéairement dépendants. On a $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration : Par hypothèse, il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n \lambda_j x_j \quad (\lambda_j \in K).$$

On obtient

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n \lambda_j f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n),$$

où x_j est la « i_0 -ième coordonnée» du n -uplet $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. D'après la propriété d'alternance, pour tout $j \neq i_0$ on a $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$, d'où le résultat.

Opération de \mathbb{S}_n sur $\mathcal{L}^n(E, K)$

Soient f une forme n -linéaire sur E et σ une permutation de \mathbb{S}_n . Soit

$$\sigma.f : E^n \rightarrow K$$

l'application définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, par l'égalité

$$(\sigma.f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

On vérifie directement le lemme qui suit.

Lemme 23. 1) L'application $\sigma.f$ est une forme n -linéaire sur E .

2) On a $\text{Id}_n.f = f$.

3) Pour tout $\tau \in \mathbb{S}_n$, on a $\tau.(\sigma.f) = (\tau \circ \sigma).f$.

4) Si f est alternée, il en est de même de $\sigma.f$.

On dit que \mathbb{S}_n opère sur $\mathcal{L}^n(E, K)$ au sens où les trois premières conditions ci-dessus sont satisfaites. D'après la dernière condition, \mathbb{S}_n opère aussi sur $\mathcal{A}^n(E, K)$.

Théorème 24. Supposons alternée sur E . Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, on a

$$\sigma.f = \varepsilon(\sigma)f.$$

Démonstration : Considérons une transposition (i, j) de \mathbb{S}_n et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Parce que f est alternée, on a

$$f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0.$$

D'après les propriétés de n -linéarité et d'alternance, on en déduit l'égalité

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

d'où

$$(i, j)f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n).$$

Par ailleurs, il existe un entier $p \geq 1$ et des transpositions τ_1, \dots, τ_p de \mathbb{S}_n tels que l'on ait $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_p$. On en déduit que l'on a (cor. 17)

$$\sigma.f = (-1)^p.f = \varepsilon(\sigma)f.$$

4. Cas où $\dim E = n$ - La droite $\mathcal{A}^n(E, K)$

On suppose dans tout ce paragraphe E de dimension finie n sur K .

1. Expression dans une base

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit (x_1, \dots, x_n) un élément de E^n . Pour tout $k = 1, \dots, n$, il existe des scalaires $a_{i_k k}$ tels que l'on ait

$$x_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k}.$$

Théorème 25. *Soit f une forme n -linéaire alternée sur E . On a*

$$(3) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i) i} \right) f(e_1, \dots, e_n).$$

Démonstration : D'après la formule (2), on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in [1, n]^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

L'ensemble $[1, n]^n$ est en bijection avec l'ensemble des applications de $[1, n]$ dans $[1, n]$ via l'application qui au n -uplet $(i_1, \dots, i_n) \in [1, n]^n$ associe l'application $\varphi : [1, n] \rightarrow [1, n]$ définie pour tout $k \in [1, n]$ par $\varphi(k) = i_k$. Par suite, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\varphi \in [1, n]^{[1, n]}} a_{\varphi(1)1} a_{\varphi(2)2} \cdots a_{\varphi(n)n} f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)}),$$

Parce que f est alternée, si φ n'est pas injective, on a $f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)}) = 0$. Une injection de $[1, n]$ dans $[1, n]$ étant une bijection, il suffit donc d'effectuer la somme ci-dessus en se limitant aux bijections de $[1, n]$. On obtient ainsi

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}),$$

D'après le théorème 24, on a

$$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$$

d'où l'égalité (3).

Corollaire 26. On a $\mathcal{A}^n(E, K) = \{0\}$ ou $\dim \mathcal{A}^n(E, K) = 1$.

Démonstration : L'application $\mathcal{A}^n(E, K) \rightarrow K$ qui à tout $f \in \mathcal{A}^n(E, K)$ associe $f(e_1, \dots, e_n)$ est linéaire. Elle est injective (th. 25), d'où l'assertion.

2. Existence d'un élément non nul dans $\mathcal{A}^n(E, K)$

Théorème 27. Soit \mathcal{B} une base de E . Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, soit $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(K)$ la matrice dont le j -ième vecteur colonne est formé des coordonnées de x_j dans la base \mathcal{B} . Soit $f_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow K$ l'application définie par

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}.$$

Alors, $f_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathcal{A}^n(E, K)$. On a $f_{\mathcal{B}} \neq 0$ et $f_{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathcal{A}^n(E, K)$.

Démonstration : Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons $u_i : E \rightarrow K$ l'application linéaire qui à tout x associe sa coordonnée relative à e_i , autrement dit, si

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \quad (\lambda_k \in K),$$

on a $u_i(x) = \lambda_i$ (on dit que u_i est la i -ème forme linéaire coordonnée par rapport à \mathcal{B}).

1) Vérifions que $f_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire. Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, soit $g_{\sigma} : E^n \rightarrow K$ l'application définie par l'égalité

$$g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}.$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a l'égalité

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k,$$

d'où $a_{\sigma(i)i} = u_{\sigma(i)}(x_i)$. Il en résulte que g_{σ} est n -linéaire. On a

$$f_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) g_{\sigma},$$

donc $f_{\mathcal{B}}$ aussi n -linéaire.

2) On a l'égalité $f_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$, d'où $f_{\mathcal{B}} \neq 0$.

3) Il reste à établir que $f_{\mathcal{B}}$ est alternée. Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, on a

$$\prod_{i=1}^n u_{\sigma(i)}(x_i) = \prod_{i=1}^n u_i(x_{\sigma^{-1}(i)}).$$

L'application qui à une permutation associe son inverse est une bijection de \mathbb{S}_n , d'où

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n u_i(x_{\sigma(i)}).$$

On a $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, d'où l'égalité

$$(4) \quad f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n u_i(x_{\sigma(i)}).$$

Soient alors (x_1, \dots, x_n) un élément de E^n et deux indices i et j tels que $x_i = x_j$. Soit τ la transposition (i, j) . Notons \mathbb{S}'_n l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma(i) < \sigma(j)$ et \mathbb{S}''_n le complémentaire de \mathbb{S}'_n dans \mathbb{S}_n . D'après (4), on a

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}'_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\sigma(k)}) + \sum_{\nu \in \mathbb{S}''_n} \varepsilon(\nu) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\nu(k)}).$$

L'application $\mathbb{S}'_n \rightarrow \mathbb{S}''_n$ qui à σ associe $\sigma \circ \tau$ est une bijection. On obtient

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}'_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\sigma(k)}) + \sum_{\sigma \in \mathbb{S}'_n} \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\sigma\tau(k)}).$$

Parce que $x_i = x_j$, on a

$$(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(n)}) = \sigma\tau.(x_1, \dots, x_n) = \sigma.(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

d'où $x_{\sigma\tau(k)} = x_{\sigma(k)}$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}'_n$, on a

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma).$$

On en déduit l'égalité

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\sigma(k)}) + \varepsilon(\sigma\tau) \prod_{k=1}^n u_k(x_{\sigma\tau(k)}) = 0,$$

d'où $f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ et le résultat.

Compte tenu de qui précède, on a donc

$$\dim A^n(E, K) = 1.$$

Par ailleurs, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , on a vu que

$$(5) \quad f_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

et $f_{\mathcal{B}}$ est l'unique élément de $\mathcal{A}^n(E, K)$ vérifiant l'égalité (5). Il en résulte que pour tout $f \in \mathcal{A}^n(E, K)$, on a

$$(6) \quad f = f(e_1, \dots, e_n)f_{\mathcal{B}}.$$

Corollaire 28. *Soit f un élément non nul de $\mathcal{A}^n(E, K)$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants.*

Démonstration : Supposons que x_1, \dots, x_n soient linéairement indépendants. Parce que $\dim E = n$, le système $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E . D'après (6), on a donc

$$f = f(x_1, \dots, x_n)f_{\mathcal{B}}.$$

On a $f \neq 0$, d'où $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. L'implication réciproque a déjà été établie (lemme 22).

5. Les trois notions de déterminant

1. Déterminant d'un système de vecteurs relativement à une base

Supposons E de dimension finie n sur K . Soit \mathcal{B} une base de E . On définit le déterminant d'un système de n vecteurs relativement à \mathcal{B} . Avec les notations du théorème :

Définition 29. *Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, le scalaire*

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

s'appelle le déterminant du système (x_1, \dots, x_n) relativement à \mathcal{B} . On note

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 30. Soit (x_1, \dots, x_n) un élément de E^n . C'est une base de E si et seulement si on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration : Par définition, on a $\det_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}}$. C'est une forme n -linéaire alternée non nulle sur E . Par ailleurs, (x_1, \dots, x_n) est une base de E si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants, d'où le résultat (cor. 28).

Le déterminant d'un système de n vecteurs relativement à une base dépend de la base choisie.

Lemme 31. Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 des bases de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a

$$\det_{\mathcal{B}_2}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration : C'est une conséquence de l'égalité (6), en prenant avec ses notations $f = \det_{\mathcal{B}_2}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

2. Déterminant d'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$

Définition 32. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. On appelle déterminant de A , noté $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}.$$

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n . Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ et C_1, \dots, C_n le système des vecteurs colonnes de A . Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a

$$C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

Par définition, on a l'égalité

$$(7) \quad \det(A) = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_n).$$

Théorème 33. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Elle est inversible si et seulement si on a $\det(A) \neq 0$.

Démonstration : La matrice A est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de K^n , d'où l'assertion (th. 30).

Exemples 34.

1) Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K).$$

Le groupe \mathbb{S}_2 est formé de l'identité et de la transposition σ telle que $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$, qui est de signature -1 . On a donc

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On retrouve la formule annoncée à ce sujet dans le chapitre I.

2) Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(K).$$

Les six éléments de \mathbb{S}_3 sont

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \text{Id}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a $\varepsilon(\sigma_1) = 1$, $\varepsilon(\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_3) = \varepsilon(\sigma_4) = -1$, $\varepsilon(\sigma_5) = \varepsilon(\sigma_6) = 1$. On retrouve de même la formule

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{13}).$$

3) Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est le produit de ses termes diagonaux (le seul terme non nul dans l'expression du déterminant est celui correspondant à l'identité de \mathbb{S}_n). En particulier, une telle matrice est inversible si et seulement si le produit de ses termes diagonaux est non nul.

Théorème 35 (Déterminant d'un produit de matrices). Soient A et B des matrices de $\mathbb{M}_n(K)$. On a

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Démonstration : Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. L'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de AB est

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On a donc

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(i)k} b_{ki} \right).$$

Examinons le produit de la somme. C'est une somme de termes de la forme

$$\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)f(i)} b_{f(i)i},$$

où f est une application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. En effectuant cette somme, on obtient

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(i)k} b_{ki} \right) = \sum_f \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)f(i)} b_{f(i)i} \right),$$

où f parcourt toutes les applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ (il y en a n^n). On a donc

$$\det(AB) = \sum_f \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)f(i)} b_{f(i)i},$$

autrement dit,

$$\det(AB) = \sum_f \prod_{i=1}^n b_{f(i)i} \left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)f(i)} \right).$$

Soit A_f la matrice dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est $a_{i,f(j)}$. On a

$$\det A_f = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)f(i)}.$$

Si f n'est pas injective, A_f a au moins deux colonnes identiques, donc $\det A_f = 0$ (propriété d'alternance et formule (7)). On a ainsi

$$\det(AB) = \sum_{f \in \mathbb{S}_n} \prod_{i=1}^n b_{f(i)i} \det A_f.$$

Pour f dans \mathbb{S}_n , on a l'égalité

$$\det A_f = \varepsilon(f) \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma f^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{\sigma f^{-1}(j)j}.$$

Vu que $\sigma \mapsto \sigma f^{-1}$ est une bijection de \mathbb{S}_n , on a donc

$$\det A_f = \varepsilon(f) \det A,$$

ce qui entraîne le résultat.

Corollaire 36. Soit A une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$. On a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration : On a $\det(I_n) = 1$, d'où l'assertion (th. 35).

Proposition 37 (Transposée). Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. On a

$$\det(A) = \det({}^t A).$$

Démonstration : Posons $A = (a_{ij})$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, d'où l'égalité

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)}.$$

Parce que l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de \mathbb{S}_n , on a donc

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \det({}^t A).$$

3. Déterminant d'un endomorphisme

Supposons E de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E . Pour tout élément $f \in \mathcal{A}^n(E, K)$, non nul, considérons l'application

$$f_u : E^n \rightarrow K$$

définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ par l'égalité

$$f_u(x_1, \dots, x_n) = f(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Elle est n -linéaire alternée sur E . Il existe donc un unique élément $\lambda(u, f) \in K$, qui dépend de u et f , tel que l'on ait dans $\mathcal{A}^n(E, K)$

$$f_u = \lambda(u, f)f.$$

Lemme 38. Pour tous $f, g \in \mathcal{A}^n(E, K)$, non nuls, on a $\lambda(u, f) = \lambda(u, g)$.

Démonstration : On a les égalités $f_u = \lambda(u, f)f$ et $g_u = \lambda(u, g)g$. Il existe un unique $\mu \in K$ non nul tel que $g = \mu f$. Par définition de f_u et g_u , on a donc $g_u = \mu f_u$, d'où

$$g_u = \lambda(u, g)\mu f = \mu \lambda(u, f)f.$$

Parce que f est une base de $\mathcal{A}^n(E, K)$, et que μ n'est pas nul, on obtient l'égalité annoncée.

Cela justifie la définition suivante :

Définition 39. On appelle déterminant de u le scalaire $\lambda(u, f)$. On le note $\det(u)$.

Par définition, pour tous $f \in \mathcal{A}^n(E, K)$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a ainsi l'égalité

$$(8) \quad f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u)f(x_1, \dots, x_n).$$

Corollaire 40. Soient \mathcal{B} une base de E et A la matrice qui représente u dans \mathcal{B} . On a

$$\det(u) = \det(A).$$

Démonstration : Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Prenons $f = f_{\mathcal{B}}$ i.e. $f = \det_{\mathcal{B}}$. On a $f_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$, et d'après la formule (8),

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u).$$

Par définition, on a $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$, d'où le résultat.

Corollaire 41. 1) On a $\det(u) \neq 0$ si et seulement si u est un automorphisme de E .

2) Pour tout endomorphisme v de E , on a $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.

Démonstration : La première assertion se déduit du corollaire 40 et du théorème 33, et la seconde est une conséquence du théorème 35.

Remarque 42. Le déterminant de u est celui de n'importe quelle matrice qui représente f dans une base de E . Le fait que $\det(u)$ ne dépende pas du choix d'une base peut aussi s'expliquer en remarquant que deux matrices semblables ont le même déterminant.

6. Règles de calculs

Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Notons C_1, \dots, C_n ses vecteurs colonnes et \mathcal{B}_0 la base canonique de K^n .

Proposition 43. 1) Soit j entre 1 et n . Supposons $C_j = X + Y$ où X, Y sont des vecteurs colonnes de K^n . On a

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{j-1}, X, C_{j+1}, \dots, C_n) + \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{j-1}, Y, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

2) Pour tout $\lambda \in K$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

3) Si A possède deux colonnes égales, ou bien deux lignes égales, on a $\det(A) = 0$.

4) On ne change pas le déterminant de A si on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres. Il en est de même en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres.

5) Le déterminant de la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de A , ou bien deux lignes de A , vaut $-\det(A)$.

Démonstration : Les conditions 1 et 2 résultent de la n -linéarité de l'application déterminant. Les conditions 3 et 4 se déduisent de sa propriété d'alternance et de la proposition 37. Le théorème 24 et le fait que la signature d'une transposition soit -1 entraînent la dernière condition.

Posons $A = (a_{ij})$ et $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a

$$C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

Définition 44 (Cofacteurs). On appelle cofacteur de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de A , notée A_{ij} , le scalaire

$$A_{ij} = \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Lemme 45. 1) Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

2) Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Démonstration : 1) On a

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_0}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right),$$

d'où l'égalité annoncée par n -linéarité.

2) D'après la première assertion, pour $j = 1, \dots, n$, on a

$$\det({}^t A) = \sum_{i=1}^n a_{ji} ({}^t A)_{ij}.$$

On a $\det({}^t A) = \det(A)$ et $({}^t A)_{ij} = A_{ji}$, d'où l'égalité annoncée.

Définition 46 (Mineurs). On appelle mineur de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de A , le déterminant de la matrice de $\mathbb{M}_{n-1}(K)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ième colonne de A .

Notation. On notera dans ce qui suit m_{ij} le mineur de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de A .

Proposition 47. Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, on a

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}.$$

Démonstration : Notons B la matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ dont les vecteurs colonnes sont, dans cet ordre, $C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n$. En effectuant $n-i$ transpositions convenables sur les lignes de B , on transforme B en la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

En effectuant $n - j$ transpositions convenables sur les colonnes de C , on transforme C en la matrice

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'assertion 5 de la proposition, on a donc

$$\det(D) = (-1)^{2n-i-j} \det(B) = (-1)^{i+j} \det(B).$$

Posons $D = (d_{ij})$. On a

$$\det(D) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n d_{\sigma(i)i}.$$

On a $d_{\sigma(n)n} = 1$ si $\sigma(n) = n$ et $d_{\sigma(n)n} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$, d'où

$$\det(D) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n, \sigma(n)=n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} d_{\sigma(i)i}.$$

Identifions \mathbb{S}_{n-1} avec le sous-groupe de \mathbb{S}_n formé des éléments fixant n (le stabilisateur de n). On obtient les égalités

$$\det(D) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} d_{\sigma(i)i} = m_{ij}.$$

Par définition, on a $\det(B) = A_{ij}$, d'où le résultat.

On en déduit les deux énoncés suivants, très utiles en pratique (lemme 45) :

Corollaire 48 (Développement suivant la j -ième colonne). *Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}.$$

Corollaire 49 (Développement suivant la i -ème ligne). *Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}.$$

Afin de calculer le déterminant d'une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$, notamment si $n \geq 4$, il est souvent conseillé de faire apparaître, avec des combinaisons linéaires convenables, des zéros dans les coefficients de la matrice, puis de développer suivant la ligne ou la colonne qui possède le plus de zéros.

Exemples 50.

1) Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(K).$$

Calculons $\det(A)$. En remplaçant la première colonne de A par la somme de ses colonnes, on obtient

$$\det(A) = 7 \det(B) \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons L_i les lignes de B . En remplaçant L_1 par $L_1 - L_2$, L_2 par $L_2 - L_3$, puis L_3 par $L_3 - L_4$, on obtient

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant de déterminant suivant la première colonne, on en déduit que l'on a

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

d'où $\det(A) = -7$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, calculons le déterminant $D(x)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{Q}).$$

Pour cela, en développant suivant la première colonne, on remarque que $D(x)$ est une fonction polynôme de degré au plus 3 à coefficients dans \mathbb{Q} . Par ailleurs, on a

$$D(1) = D(2) = D(3) = 0.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que l'on ait

$$D(x) = \lambda(x-1)(x-2)(x-3).$$

Tout revient à calculer λ . C'est le coefficient de x^3 , d'où

$$\lambda = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = -2.$$

7. Comatrice

Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$.

Définition 51. On appelle comatrice de A , notée $\text{com}(A)$ ou $\text{com } A$, la matrice de $\mathbb{M}_n(K)$ dont l'élément de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est le cofacteur A_{ij} .

Exemple 52. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(K).$$

On a

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = 46, \quad A_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -21, \quad \text{etc } \dots,$$

et on vérifie que l'on a

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 46 & -21 & 9 \\ 15 & -5 & -10 \\ -2 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

Remarque 53. Afin de calculer $\text{com}(A)$, il faut calculer n^2 déterminants d'ordre $n-1$.

Lemme 54. On a $\text{com}({}^t A) = {}^t \text{com}(A)$.

Démonstration : Une matrice et sa transposée ayant le même déterminant, A_{ji} est le cofacteur de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de ${}^t A$, d'où l'assertion.

Théorème 55. *On a les égalités*

$$({}^t \text{com } A)A = A({}^t \text{com } A) = (\det A)I_n.$$

Démonstration : Posons $A = (a_{ij})$. Soient β_1, \dots, β_n des éléments de K . Pour tout j , la matrice déduite de A en remplaçant sa j -ième colonne par celle formée des β_k , i.e. si l'on remplace a_{kj} par β_k , a pour déterminant (lemme 45)

$$\sum_{k=1}^n \beta_k A_{kj}.$$

Soit ℓ un entier entre 1 et n . Avec $\beta_k = a_{k\ell}$, autrement dit, si l'on remplace la j -ième colonne de A par sa ℓ -ième colonne, alors le déterminant de la matrice obtenue est nul si $\ell \neq j$ (deux colonnes identiques) et vaut $\det A$ si $\ell = j$. Pour tous ℓ et j entre 1 et n , on a ainsi

$$\sum_{k=1}^n a_{k\ell} A_{kj} = \delta_{\ell j} \det A \quad \text{avec} \quad \delta_{\ell j} = 1 \text{ si } \ell = j \quad \text{et} \quad \delta_{\ell j} = 0 \text{ si } \ell \neq j.$$

L'élément de la j -ième ligne et de la k -ième colonne de ${}^t \text{com } A$ est A_{kj} , d'où l'égalité $({}^t \text{com } A)A = (\det A)I_n$. De même, pour tous ℓ et i entre 1 et n , on a

$$\sum_{k=1}^n a_{\ell k} A_{ik} = \delta_{i\ell} \det A \quad \text{avec} \quad \delta_{i\ell} = 1 \text{ si } \ell = i \quad \text{et} \quad \delta_{i\ell} = 0 \text{ si } \ell \neq i,$$

d'où $A({}^t \text{com } A) = (\det A)I_n$ et le résultat.

Corollaire 56. *La matrice A est inversible si et seulement si $\text{com}(A)$ est inversible. Dans ce cas, on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A).$$

Démonstration : Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$, donc ${}^t \text{com}(A)$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{\det(A)} A$. Par suite, $\text{com}(A)$ est inversible. Inversement, supposons $\text{com}(A)$ inversible. Il en est alors de même de ${}^t \text{com}(A)$. Si A n'est pas inversible, on a $\det(A) = 0$, d'où $({}^t \text{com } A)A = 0$, puis $A = 0$. On obtient $\text{com}(A) = 0$ et une contradiction, d'où le résultat.

Remarque 57. Reprenons la matrice intervenant dans l'exemple 52. Le déterminant de A est 85, et en utilisant l'égalité ci-dessus, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 46 & 15 & -2 \\ -21 & -5 & 12 \\ 9 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cela étant, il est préférable de ne pas utiliser cette formule pour calculer l'inverse d'une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$ dès que $n \geq 4$ (remarque 53).

8. Étude du rang d'une matrice

Soit A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$.

Définition 58 (Matrices extraites). Soient I un sous-ensemble de $[1, n]$ et J un sous-ensemble de $[1, p]$. On appelle matrice extraite de A associée à (I, J) , notée $A_{I,J}$, la matrice obtenue à partir de A en ne gardant que les lignes de I et les colonnes de J .

Exemple 59. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 10 & 12 \\ -6 & 2 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(K).$$

On a

$$A_{\{1,3\}, \{2,4,5\}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Définition 60 (Déterminants extraits). Lorsque I et J sont de même cardinal, le déterminant de $A_{I,J}$ est appelé déterminant extrait associé à (I, J) de la matrice A .

Théorème 61. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) le rang de A est p .
- 2) Il existe $I \subseteq [1, n]$, de cardinal p , tel que $A_{I,[1,p]} \in \mathbb{M}_p(K)$ soit inversible.
- 3) Il existe un déterminant d'ordre p extrait de A non nul.

Démonstration : Supposons $r(A) = p$. Le rang du système des vecteurs lignes $L_i \in K^p$ de A est donc p . Il existe ainsi $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq [1, n]$, de cardinal p , tel que $(L_{i_1}, \dots, L_{i_p})$ soit une base de K^p . Il en résulte que $A_{I,[1,p]}$ est inversible (Chap. II, th. 76).

Inversement, supposons qu'il existe $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq [1, n]$, de cardinal p , tel que $A_{I,[1,p]}$ soit inversible. Parce que $(L_{i_1}, \dots, L_{i_p})$ est une base de K^p , on a $r(A) \geq p$. Par ailleurs, on a $r(A) \leq p$, d'où $r(A) = p$ et le résultat.

Corollaire 62. Soit r un entier naturel. On a $r(A) \geq r$ si et seulement si il existe un déterminant d'ordre r extrait de A non nul.

Démonstration : Supposons qu'il existe un déterminant extrait de A d'ordre r non nul. Il existe alors $I \subseteq [1, n]$ et $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subseteq [1, p]$, de même cardinalité r , tels que

$A_{I,J} \in \mathbb{M}_r(K)$ soit inversible. La matrice $A_{[1,n],J}$ est donc de rang r (th. 61). Ses vecteurs colonnes C_{j_1}, \dots, C_{j_r} sont donc linéairement indépendants, d'où $r(A) \geq r$.

Inversement, supposons que tous les déterminants d'ordre r extraits de A soient nuls. Soient C_{j_1}, \dots, C_{j_r} , r vecteurs colonnes de A . D'après l'hypothèse faite, le rang de la matrice dont les lignes sont celles de A et dont les colonnes sont les C_{j_r} , est strictement plus petit que r (th. 61). Les vecteurs C_{j_1}, \dots, C_{j_r} sont donc linéairement dépendants, d'où $r(A) < r$ et le résultat.

On en déduit le résultat suivant, très utile en pratique.

Théorème 63. *Le rang de A est l'ordre maximum d'un déterminant extrait de A non nul.*

Démonstration : Soit r cet ordre maximum. On a $r(A) \geq r$ (cor. 62). Par ailleurs, on a $r(A) < r + 1$ (*loc. cit.*), d'où $r(A) = r$.

Exemples 64.

1) Soit λ un élément de K . Déterminons le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(K).$$

On vérifie que l'on a $\det(A) = \lambda(\lambda^2 - 1)$. Si $\lambda \neq 0, \pm 1$, on a donc $r(A) = 4$. En posant $I = \{1, 2, 3\}$ et $J = \{2, 3, 4\}$, on a $\det(A_{I,J}) = \lambda$. On en déduit que si $\lambda = \pm 1$, alors $r(A) = 3$. Par ailleurs, avec $I = \{1, 2, 3\}$ et $J = \{1, 2, 3\}$, on obtient $\det(A_{I,J}) = \lambda - 1$. Si $\lambda = 0$, on a de même $r(A) = 3$.

2) Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(K)$. Examinons le lien entre le rang de A et celui de sa comatrice. Si $r(A) = n$, alors $r(\text{com } A) = n$ (cor. 56).

Supposons $r(A) = n - 1$. Vérifions que l'on a $r(\text{com } A) = 1$. On a l'égalité (th. 55)

$$({}^t \text{com } A)A = 0.$$

Par suite, en identifiant les matrices et les endomorphismes de K^n correspondant, l'image de A est contenue dans le noyau de ${}^t \text{com } A$. On a donc

$$\dim \text{Ker}({}^t \text{com } A) \geq n - 1,$$

d'où $r(\text{com } A) \leq 1$. Tout revient à voir que $\text{com } A \neq 0$. D'après l'hypothèse faite, il existe i et j entre 1 et n tels que la matrice de $\mathbb{M}_{n-1}(K)$ déduite de A en supprimant sa i -ème ligne et sa j -ième colonne soit de déterminant non nul (th. 63). Son déterminant est $(-1)^{i+j} A_{ij}$ (prop. 47). Le cofacteur A_{ij} est donc non nul, d'où $\text{com } A \neq 0$ et l'assertion.

Supposons $r(A) \leq n - 2$. Tous les déterminants extraits de A d'ordre $n - 1$ sont nuls (th. 63). Cela entraîne que tous les cofacteurs de A sont nuls, d'où $\text{com}(A) = 0$.

Définition 65 (Matrices bordantes). Soient A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ et $A_{I,J}$ une matrice extraite de A . On appelle *bordant* de $A_{I,J}$ toute matrice extraite $A_{I',J'}$ de A telle que l'on ait $I \subseteq I'$ et $J \subseteq J'$.

Exemple 66. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(K), \quad I = \{1, 3\}, \quad J = \{1, 4, 5\}.$$

On a

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posons $I' = \{1, 2, 3\}$ et $J' = \{1, 3, 4, 5\}$. La matrice

$$A_{I',J'} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

est un bordant de $A_{I,J}$.

Théorème 67. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$. Soit $A_{I,J} \in \mathbb{M}_r(K)$ une matrice extraite de A d'ordre r inversible. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) on a $r(A) = r$.
- 2) Tous les bordants d'ordre $r + 1$ de $A_{I,J}$ ont un déterminant nul.

Démonstration : L'implication 1) \implies 2) a déjà été démontrée (th. 63).

Inversement, supposons $r(A) \geq r + 1$. Montrons qu'il existe un bordant d'ordre $r + 1$ de $A_{I,J}$ inversible. Cela établira l'implication réciproque car, d'après l'hypothèse faite, on a $r(A) \geq r$ (cor. 62). Posons

$$I = \{i_1, \dots, i_r\} \quad \text{et} \quad J = \{j_1, \dots, j_r\}.$$

La matrice $A_{I,J}$ étant inversible, la famille des vecteurs colonnes $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ de A dans K^n est libre (th. 61). Parce que l'on a $r(A) \geq r + 1$, il existe un autre vecteur colonne C_{j_t} de A tel que la famille $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r}, C_{j_t})$ soit libre dans K^n . Posons

$$J' = J \cup \{j_t\}.$$

Le rang de la matrice $A_{[1,n],J'}$ est $r+1$ (th. 61). Les vecteurs lignes de $A_{I,J}$ étant linéairement indépendants dans K^r , il en est de même des vecteurs lignes L_{i_1}, \dots, L_{i_r} de $A_{[1,n],J'}$ dans K^{r+1} . Il existe donc un vecteur ligne L_s de cette matrice tel que la famille $(L_{i_1}, \dots, L_{i_r}, L_{i_s})$ soit libre dans K^{r+1} . Posons

$$I' = I \cup \{i_s\}.$$

La matrice $A_{I',J'}$ est alors un bordant de $A_{I,J}$ d'ordre $r+1$ inversible, d'où notre assertion.

Remarque 68. Avec les notations précédentes, il y a $(n-r)(p-r)$ matrices bordantes de $A_{I,J}$.

9. Géométrie vectorielle

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Soit F sous-espace vectoriel de E . Posons $\dim F = p$ et considérons une base (u_1, \dots, u_p) de F . On s'intéresse ici au problème suivant.

Problème. Étant donné un vecteur x de E , trouver une condition nécessaire et suffisante pour que x soit dans F .

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $j = 1, \dots, p$, il existe des scalaires $a_{ij} \in K$ tels que

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

Soit A la matrice de $\mathbb{M}_{n,p}(K)$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ième colonne est a_{ij} . Le rang de A est p . Il existe donc une matrice extraite de A d'ordre p inversible. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de \mathcal{B}_E , on peut supposer que $A_{[1,p],[1,p]}$ est inversible.

Posons par ailleurs

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & x_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p+1}(K),$$

et pour tout $k = p+1, \dots, n$,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & x_p \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kp} & x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{p+1}(K).$$

Théorème 69. *Le vecteur x est dans F si et seulement si pour tout $k = p+1, \dots, n$, on a*

$$\det A_k = 0.$$

Démonstration : Le vecteur x dans F si et seulement si la famille (u_1, \dots, u_p, x) est liée. Le rang de A' étant au moins p , cette condition signifie que le rang de A' est p , autrement dit que tous les bordants d'ordre $p+1$ de $A_{[1,p],[1,p]}$ ont un déterminant nul (th. 67), d'où l'assertion.

Les $n-p$ égalités $\det A_k = 0$ sont les équations du sous-espace vectoriel F dans la base \mathcal{B}_E . Chacune de ces égalités définit un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, i.e. un hyperplan de E (c'est le noyau d'une application linéaire $E \rightarrow K$ non nulle i.e. d'une forme linéaire non nulle). En particulier :

Corollaire 70. *Tout sous-espace vectoriel de E de dimension p est intersection de $n-p$ hyperplans.*

Exemple 71. Soient u et v les vecteurs de \mathbb{R}^4 définis par

$$u = (1, 2, 1, 1) \quad \text{et} \quad v = (3, 1, 1, 0).$$

Soit \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^4 . Déterminons les équations dans \mathcal{B}_0 de $\text{vect}(u, v)$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4,2}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -5,$$

d'où $r(A) = 2$ (th. 61). Par suite, $\text{vect}(u, v)$ est un plan de \mathbb{R}^4 . Un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ appartient à $\text{vect}(u, v)$ si et seulement si la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

est de rang 2. D'après le théorème 67, utilisé avec $I = J = \{1, 2\}$, cette condition signifie que l'on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que le plan de \mathbb{R}^4 engendré par u et v a pour équations dans \mathcal{B}_0

$$x + 2y - 5z = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 5t = 0.$$

10. Formules de Cramer

Soient A une matrice inversible de $\mathbb{M}_n(K)$ et B une matrice colonne de $\mathbb{M}_{n,1}(K)$. Il existe $X \in M_{n,1}(K)$ unique tel que l'on ait $AX = B$. Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Notons \mathcal{B}_0 la base canonique de K^n .

Théorème 72 (Cramer). Soient C_1, \dots, C_n les vecteurs colonnes de la matrice A . Pour tout k entre 1 et n , on a

$$x_k = \frac{\det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}.$$

Démonstration : Posons $A = (a_{ij})$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i.$$

On a donc dans $\mathbb{M}_{n,1}(K)$ l'égalité

$$\sum_{j=1}^n x_j C_j = B.$$

Il en résulte que pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n) = \sum_{j=1}^n x_j \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, C_j, C_{k+1}, \dots, C_n).$$

Si $j \neq k$, on a $\det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, C_j, C_{k+1}, \dots, C_n) = 0$, d'où

$$\det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n) = x_k \det_{\mathcal{B}_0}(C_1, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$$

et le résultat.

Exemple 73. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

On a $\det(A) = -2$. Trouvons l'unique vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que l'on a

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Avec les formules de Cramer, on obtient

$$x = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

d'où $(x, y, z) = (4, 3, -3)$.

11. Systèmes d'équations linéaires

Un système de n équations linéaires à p inconnues est la donnée de deux matrices $A \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{n,1}(K)$. On se préoccupe du problème de déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes de $X \in \mathbb{M}_{p,1}(K)$ tels que

$$AX = B.$$

1. Interprétation

Soit $f = L(A) : K^p \rightarrow K^n$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques de K^p et K^n est A . Notons $b \in K^n$ le vecteur dont la i -ème coordonnée dans la base canonique est le coefficient de la i -ème ligne de B . Notre problème est équivalent à la détermination de l'ensemble

$$S = \left\{ x \in K^p \mid f(x) = b \right\}.$$

Lemme 74. 1) Si b n'est pas dans l'image de f , alors S est vide.

2) Supposons que b soit dans l'image de f . Soit $x_0 \in K^p$ tel que $f(x_0) = b$. On a

$$S = \left\{ x \in K^p \mid x - x_0 \in \text{Ker } f \right\}.$$

Autrement dit, S est le sous-espace affine de K^p passant par x_0 et de direction $\text{Ker}(f)$.

Démonstration : Supposons $b \in f(K^p)$. Soit $x \in K^p$ tel que $f(x) = b$. On a alors $f(x - x_0) = 0$, donc $x - x_0$ est dans $\text{Ker}(f)$. Inversement, cette condition signifie que l'on a $f(x) = f(x_0) = b$, donc x est dans S .

Terminologie. On dit que le système est compatible si S n'est pas vide.

2. Méthode de résolution

1) On détermine le rang r de A . Soient $I \subseteq [1, n]$ et $J \subseteq [1, p]$ tels que $A_{I,J}$ soit une matrice extraite de A d'ordre r inversible. Quitte à modifier la numérotation des inconnues, on peut supposer que l'on a $I = J = [1, r]$.

2) On étudie la compatibilité du système. Posons $b = (b_1, \dots, b_n)$, $A = (a_{ij})$ et pour tout $k = r + 1, \dots, n$,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{r+1}(K).$$

Lemme 75. *Le système est compatible si et seulement si pour tout $k = r + 1, \dots, n$, on a*

$$\det(A_k) = 0.$$

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de K^n . Pour tout $j = 1, \dots, r$, posons (le j -ième vecteur colonne de A)

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

L'ensemble S n'est pas vide si et seulement si b appartient à l'image de f dont une base est (u_1, \dots, u_r) . Le théorème 69 entraîne alors le résultat.

Remarque 76. Si $r = n$, le système est toujours compatible.

3) Supposons le système compatible. Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons $L_i : K^p \rightarrow K$ l'application linéaire définie par

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \quad \text{où} \quad x = (x_1, \dots, x_p).$$

Théorème 77 (Rouché-Fontené). Soit x un vecteur de K^p . Alors, x appartient à S si et seulement si on a

$$L_i(x) = b_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, r.$$

Démonstration : La condition est nécessaire par définition. Inversement, soit x un vecteur de K^p tel que pour tout $i = 1, \dots, r$, on ait $L_i(x) = b_i$. Soit k un entier compris entre $r + 1$ et n . Il s'agit de montrer que l'on a

$$L_k(x) = b_k.$$

Par hypothèse, le système est compatible. Il existe donc $x_0 \in K^p$ tel que l'on ait

$$L_i(x_0) = b_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Par ailleurs, les r premières lignes de A sont indépendantes (comme vecteurs de K^p) et A est de rang r . Le k -ième vecteur ligne de A est donc combinaison linéaire des r premiers vecteurs lignes. Il en résulte l'existence de scalaires α_{ki} tels que l'on ait

$$L_k = \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} L_i.$$

On a donc

$$L_k(x_0) = \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} L_i(x_0),$$

autrement dit,

$$b_k = \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} b_i.$$

On en déduit que l'on a

$$L_k(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} L_i(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} b_i = b_k,$$

d'où le résultat.

Corollaire 78. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ un vecteur de K^p . Alors, x est dans S si et seulement si on a

$$A_{[1,r],[1,r]} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad b'_i = b_i - \sum_{k=r+1}^p a_{ik} x_k \quad (1 \leq i \leq r).$$

La matrice $A_{[1,r],[1,r]}$ étant inversible, on se ramène ainsi à la résolution d'un système de Cramer en les inconnues x_1, \dots, x_r , en attribuant aux inconnues x_{r+1}, \dots, x_p des valeurs arbitraires.

Exemples 79.

1) Déterminons l'ensemble S des vecteurs $(x, y, z) \in K^3$ tels que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,3}(K).$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant est non nul (il vaut 1). Par suite, A est de rang 2 et le système est compatible. On en déduit que l'on a (cf. cor. 78)

$$S = \left\{ (1 - z, -2z, z) \mid z \in K \right\}.$$

2) Soit t un nombre réel. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}.$$

Réolvons le système $AX = B$. On a $\det(A) = 0$ et $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -1$. Par suite, le rang de A est 2. Le système est compatible si et seulement si on a

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} = 0,$$

autrement dit, si $t = 11$. Dans ce cas, un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est dans l'ensemble S des solutions du système si et seulement si on a (*loc. cit.*)

$$3x - 2y = 1 - z \quad \text{et} \quad 4x - 3y = 4 - z.$$

En utilisant les formules de Cramer, on en déduit que

$$x = -\det \begin{pmatrix} 1 - z & -2 \\ 4 - z & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = -\det \begin{pmatrix} 3 & 1 - z \\ 4 & 4 - z \end{pmatrix}.$$

Si $t = 11$, on a donc

$$S = \left\{ (-5 - z, -8 - z, z) \mid z \in K \right\},$$

et si $t \neq 11$, S est vide.