

Correction des exercices sur le chapitre I

Exercice 1

- 1) On vérifie que l'on a l'égalité $56798 = 23 \times 2469 + 11$, le quotient est donc 2469 et le reste est 11.
- 2) La racine carrée de 1777 est environ 42,15. On vérifie que 1777 n'est pas divisible par un nombre premier inférieur à 42, autrement dit par l'un des entiers

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$

donc 1777 est premier.

- 3) Soit n un entier réalisant la condition de l'énoncé. Il existe deux entiers q et q' tels que l'on ait

$$21685 = nq + 37 \quad \text{et} \quad 33509 = nq' + 53.$$

On a ainsi

$$21648 = nq \quad \text{et} \quad 33456 = nq'.$$

Il en résulte que n divise le pgcd de 21648 et 33456. En utilisant l'algorithme d'Euclide, on vérifie que l'on a le tableau suivant :

	1	1	1	5	
33456	21648	11808	9840	1968	0

Par suite, le pgcd de 21648 et 33456 est 1968. On en déduit que 1968 est le seul entier répondant à la question.

- 4) En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient le tableau suivant :

	38	2	3	
26093	679	291	97	0
1	0	1	-2	
0	1	-38	77	

Il en résulte que l'on a $d = 97$ et on obtient la relation de Bézout

$$77 \times 679 - 2 \times 26093 = 97.$$

- 5) Supposons que 3 ne divise pas abc . Tout entier non divisible par 3 est congru à ± 1 modulo 3. Ainsi, a, b et c sont congrus à ± 1 modulo 3. On en déduit que a^3, b^3 et c^3 sont congrus à ± 1 modulo 9 et leur somme n'est donc pas congrue à 0 modulo 9, d'où l'assertion.
- 6) On a $3 \equiv -4 \pmod{7}$. Parce que n est impair, on a donc $3^n \equiv -4^n \pmod{7}$.

Exercice 2

- 1.1) On a $n^3 + n^2 + 1 = (n^2 + 2n - 1)(n - 1) + 3n$. Il en résulte que le pgcd d cherché est celui de $n^2 + 2n - 1$ et $3n$. Par ailleurs, n et $n^2 + 2n - 1$ sont premiers entre eux. On en déduit que $d = 1$ ou 3. Puisque 3 ne divise pas $n^2 + 2n - 1$, on a donc $d = 1$.
- 1.2) On a les égalités

$$9n + 4 = 4(2n - 1) + (n + 8) \quad \text{et} \quad 2n - 1 = 2(n + 8) - 17.$$

On en déduit que le pgcd de $9n + 4$ et $2n - 1$ est celui de $n + 8$ et 17. Si on a $n \equiv 9 \pmod{17}$ ce pgcd est donc 17, et sinon il vaut 1.

- 2) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x + y - 1 = \text{pgcd}(x, y)$. Le pgcd de x et de y divise x et y . On en déduit que l'on a $\text{pgcd}(x, y) = 1$, d'où $x + y = 2$. Il en résulte que l'ensemble cherché est

$$\{(t, 2 - t) \mid t \in \mathbb{Z}, t \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

Exercice 3

- 1.1) Tout élément de S étant premier avec p , il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + vp = 1$ (Théorème de Bézout). Par ailleurs, il existe des entiers b et q tels que $u = qp + b$ avec $1 \leq b < p$ (cf. le th. 1.1 et le fait que p ne divise pas u). On a ainsi $ab \equiv 1 \pmod{p}$ et b est dans S , d'où l'assertion d'existence. Soient b et b' des éléments de S tels que $ab \equiv ab' \pmod{p}$. Alors p divise $a(b - b')$, donc p divise $b - b'$ (car p ne divise pas a). Parce que b et b' sont dans S , cela implique $b = b'$, d'où le résultat.
- 1.2) Soit a un élément de S tel que $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$. L'entier p divise $(a - 1)(a + 1)$ et a étant dans S , cela entraîne $a = 1$ ou $a = p - 1$. D'après la question précédente, on déduit alors que l'on a

$$\prod_{k=2}^{p-2} k \equiv 1 \pmod{p},$$

d'où la congruence $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

- 2) Soit $d < p$ est un diviseur positif de p . Alors d divise $(p - 1)!$, d'où $d = 1$ et le fait que p soit premier.

Exercice 4

On a

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + \dots + a + 1,$$

ce qui entraîne

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} \equiv m \pmod{a - 1}.$$

L'ensemble des diviseurs communs de $\frac{a^m - 1}{a - 1}$ et $a - 1$ est donc l'ensemble des diviseurs communs de m et $a - 1$, d'où le résultat.

Exercice 5

Parce que m et n sont premiers entre eux, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$um \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq u \leq n.$$

Cette assertion est une conséquence du théorème de Bézout et du théorème de division euclidienne. Posons

$$um = 1 + vn \quad (v \in \mathbb{N}).$$

On a

$$0 \leq v = \frac{um - 1}{n} \leq \frac{um}{n} \leq m,$$

d'où l'assertion.

(On a ainsi deux représentants privilégiés d'égales de Bézout. Par exemple, avec le couple $(m, n) = (3, 5)$, on obtient les deux égalités $5 \times 2 - 3 \times 3 = 1$ et $2 \times 3 - 5 \times 1 = 1$.)

Exercice 6

L'entier $a^d - 1$ divise $a^m - 1$ et $a^n - 1$, donc il divise leur pgcd. Inversement, il existe u et v dans \mathbb{N} , tels que l'on ait (exercice 5)

$$d = un - vm.$$

Par ailleurs, on a

$$a^{un} - 1 - a^d(a^{vm} - 1) = a^d - 1.$$

Parce que $a^n - 1$ (resp. $a^m - 1$) divise $a^{un} - 1$ (resp. $a^{vm} - 1$), on en déduit que leur pgcd divise le premier membre de cette égalité, autrement il divise $a^d - 1$, d'où le résultat.

Exercice 7

Vérifions que 1050 et 851 sont premiers entre eux et déterminons deux entiers x_0 et y_0 tels que $1050x_0 + 851y_0 = 1$. L'algorithme d'Euclide fournit le tableau suivant :

	1	4	3	1	1	1	1	1	1	1	2	
1050	851	199	55	34	21	13	8	5	3	2	1	0
1	0	1	-4	13	-17	30	-47	77	-124	201	-325	
0	1	-1	5	-16	21	-37	58	-95	153	-248	401	

On en déduit que $x_0 = -325$ et $y_0 = 401$ conviennent. Considérons des entiers x et y tel que $1050x + 851y = 1$. On obtient l'égalité

$$1050(x - x_0) = 851(y_0 - y).$$

On en déduit l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 851k$ et $y = y_0 - 1050k$. Par suite, l'ensemble cherché est

$$\left\{ (-325 + 851k, 401 - 1050k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 8

Soient x , y et z respectivement le nombre d'hommes, de femmes et d'enfants. Compte tenu des hypothèses faites, on a les égalités

$$(1) \quad x + y + z = 41 \quad \text{et} \quad 4x + 3y + \frac{z}{3} = 40,$$

autrement dit, on a

$$x + y + z = 41 \quad \text{et} \quad 12x + 9y + z = 120.$$

Par soustraction de ces deux égalités, on obtient

$$11x + 8y = 79.$$

Le couple $(5, 3)$ vérifie cette égalité. Par suite, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$x = 5 + 8k \quad \text{et} \quad y = 3 - 11k.$$

Puisque x et y sont des entiers naturels, on a $k = 0$, d'où $x = 5$, $y = 3$ puis $z = 33$. Inversement, le triplet $(x, y, z) = (5, 3, 33)$ vérifie les conditions (1), c'est donc la solution cherchée.

Exercice 9

En utilisant l'égalité, $2 \times 19 - 37 = 1$, on constate que l'entier

$$k = 2 \times (19 \times 2) + 9 \times (-37) = -257$$

vérifie les congruences $k \equiv 2 \pmod{37}$ et $k \equiv 9 \pmod{19}$ (cf. la démonstration du théorème chinois). L'entier cherché est donc $n = -257 + 703 = 446$ (*loc. cit.*).

Exercice 10

- 1) Le coefficient binomial $\binom{k+n}{k}$ est un entier et on a les égalités

$$\binom{k+n}{k} = \frac{(k+n)!}{k!n!} = \frac{A}{n!}.$$

Le quotient est donc $\binom{k+n}{k}$ et le reste est nul.

- 2) D'après la question précédente, A est divisible par $n!$, d'où le résultat.

Exercice 11

- 1) Soient $m > n$ des entiers. Supposons qu'il existe p premier divisant u_m et u_n . Parce que p divise u_n on a $u_{n+1} \equiv -2 \pmod{p}$. Il en résulte que pour tout $k \geq n+2$, on a $u_k \equiv 2 \pmod{p}$. On a donc $u_m \equiv \pm 2 \pmod{p}$. On a $p \neq 2$ car u_i est impair pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où une contradiction et le résultat.
- 2) Chaque entier u_n possède un diviseur premier. La question précédente entraîne alors l'assertion.

Exercice 12

Soit n un entier de la forme indiquée dans l'énoncé. On a

$$n = 7 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + a \times 10^4 + b \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + c.$$

On a $168 = 3 \times 7 \times 8$. Parce que 8 divise n , et que 10^3 est divisible par 8, l'entier $45c$ est donc divisible par 8, ce qui implique $c = 6$. L'entier n étant divisible par 3, la somme de ses chiffres l'est aussi, d'où

$$a + b \equiv 1 \pmod{3}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 3 \pmod{7}, & 10^2 &\equiv 2 \pmod{7}, & 10^3 &\equiv 6 \pmod{7}, & 10^4 &\equiv 4 \pmod{7}, \\ 10^5 &\equiv 5 \pmod{7}, & 10^6 &\equiv 1 \pmod{7}, & 10^7 &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Puisque n est divisible par 7, on en déduit la congruence

$$3a + b \equiv 1 \pmod{7}.$$

Il en résulte que l'on a

$$(a, b) \in \{(0, 1), (2, 2), (4, 3), (6, 4), (8, 5)\}.$$

On vérifie ensuite que les entiers

$$77001456, \quad 77022456, \quad 77043456, \quad 77064456, \quad 77085456,$$

sont divisibles par 168. Ce sont donc les entiers correspondant aux triplets cherchés.

Exercice 13

On a $N = 2^{n-1} + \dots + 1 = 2^n - 1$, d'où les égalités

$$N^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^{n-1} - 1) + 1.$$

Autrement dit, on a

$$N^2 = 2^{n+1}(2^{n-2} + \dots + 1) + 1 = 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + \dots + 2^{n+1} + 1.$$

L'écriture de N^2 en base deux est donc

$$N^2 = 1 \dots 10 \dots 01,$$

dans laquelle apparaît (de gauche à droite) $n - 1$ fois le chiffre 1, n fois le chiffre 0 et le chiffre 1.
