

Exercices sur le chapitre I

Exercice 1

- 1) Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 56798 par 23 ?
- 2) Montrer que 1777 est un nombre premier.
- 3) Déterminer les entiers n de quatre chiffres tels que les restes des divisions euclidiennes de 21685 et 33509 par n soient respectivement 37 et 53.
- 4) Notons d le pgcd de 26093 et 679. Calculer d et déterminer des entiers relatifs u et v tels que l'on ait

$$d = 26093u + 679v.$$

- 5) Soient a, b, c des entiers relatifs tels que 9 divise $a^3 + b^3 + c^3$. Montrer que 3 divise abc .
- 6) Soit n un entier naturel impair. Montrer que 7 divise $3^n + 4^n$.

Exercice 2

- 1) Soit n un entier relatif.
 - 1.1) Déterminer le pgcd de $n^3 + n^2 + 1$ et $n^2 + 2n - 1$.
 - 1.2) Déterminer le pgcd de $9n + 4$ et $2n - 1$.
- 2) Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaisant l'égalité

$$x + y - 1 = \text{pgcd}(x, y).$$

Exercice 3 (Théorème de Wilson)

Soit $p \geq 2$ un entier. L'objectif de cet exercice est d'établir que p est premier si et seulement si on a la congruence

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

- 1) Supposons p premier. Posons $S = \{1, 2, \dots, p-1\}$.
 - 1.1) Soit a un élément de S . Montrer qu'il existe un unique élément $b \in S$ tel que l'on ait $ab \equiv 1 \pmod{p}$.

- 1.2) En déduire que l'on a $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
- 2) Supposons $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Montrer que p est premier.

Exercice 4

Soient a et m des entiers tels que $a \geq 2$ et $m \geq 1$. Montrer que l'on a

$$\text{pgcd}\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{pgcd}(a - 1, m).$$

Exercice 5

Soient $m, n \geq 1$ des entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe des entiers u et v uniques tels que l'on ait

$$um - vn = 1 \quad \text{avec} \quad 0 \leq u \leq n \quad \text{et} \quad 0 \leq v \leq m.$$

Exercice 6

Soient $m, n \geq 1$ et $a \geq 2$ des entiers. Posons $d = \text{pgcd}(m, n)$. Montrer que l'on a

$$a^d - 1 = \text{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1).$$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaisant l'égalité

$$1050x + 851y = 1.$$

Exercice 8

Dans un banquet, 41 personnes dépensent 40 sous. Chaque homme paie 4 sous, chaque femme 3 sous et chaque enfant 4 deniers. Sachant qu'il y a 12 deniers dans un sou, combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

Exercice 9

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'on ait

$$n \equiv 9 \pmod{19} \quad \text{et} \quad n \equiv 2 \pmod{37}.$$

Exercice 10

Soient k et n des entiers naturels. Posons

$$A = \prod_{i=1}^n (k + i).$$

- 1) Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par $n!$?
- 2) En déduire que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers définies par $u_0 \in \mathbb{N}$, avec u_0 impair, et la relation $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

- 1) Montrer que pour tous m et n distincts, les entiers u_m et u_n sont premiers entre eux.
- 2) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 12

Déterminer les entiers, divisibles par 168, dont l'écriture décimale est de la forme

$$770ab45c.$$

Exercice 13

Soit n un entier naturel non nul. Notons N l'entier dont l'écriture en base deux est constituée de n chiffres, tous égaux à 1. Déterminer l'écriture de N^2 en base deux.
