

Partiel du 23 novembre 2017

Durée 2h

**Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.**

**Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.**

Veillez préciser votre groupe de TD sur votre copie.

Les trois exercices sont indépendants.

### **Exercice 1**

Les trois questions sont indépendantes.

1) Posons  $a = 67$  et  $b = 59$ .

1.1) Montrer que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

1.2) Expliciter deux entiers  $u$  et  $v$  tels que l'on ait  $au + bv = 1$ .

1.3) Déterminer le plus petit entier naturel  $N$  satisfaisant les congruences

$$N \equiv 3 \pmod{a} \quad \text{et} \quad N \equiv 2 \pmod{b}.$$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $t_n = 2^{2^n} + 5$ .

2.1) Pour tout  $n \geq 1$ , montrer que l'on a  $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{3}$ .

2.2) En déduire l'ensemble des entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $t_n$  soit un nombre premier.

3) Déterminer l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que  $p$  divise  $3^p + 7$  (on pourra utiliser le petit théorème de Fermat).

### **Exercice 2**

Soit  $G$  le groupe des éléments inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ .

1) Quel est l'ordre de  $G$  ?

Notons  $\bar{2}$  la classe de 2 modulo 27.

2) Justifier pourquoi  $\bar{2}$  appartient à  $G$ .

3) Quel est l'inverse de  $\bar{2}$  dans  $G$  ?

4) Quel est l'ordre de  $\bar{2}$  dans  $G$  ?

5) En déduire que  $G$  est un groupe cyclique.

- 6) Quel est l'ordre de  $\bar{2}^{12}$  dans  $G$  ?
- 7) Quel est le nombre de sous-groupes de  $G$  ?
- 8) Quel est le nombre de générateurs de  $G$  ?

### Exercice 3

Soit  $A$  un anneau intègre fini.

- 1) Soit  $a$  un élément non nul de  $A$ . Notons  $f : A \rightarrow A$  l'application définie pour tout  $x \in A$  par l'égalité

$$f(x) = ax.$$

- 1.1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $A$  sur  $A$ .
    - 1.2) En déduire que  $a$  est inversible.
    - 1.3) En déduire que  $A$  est un corps.
  - 2) Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Montrer que  $I = A$ .
  - 3) L'anneau produit  $A \times A$  est-il intègre ?
  - 4) Soit  $n$  le cardinal de  $A$ . Déterminer, en fonction de  $n$ , l'ordre du groupe des éléments inversibles de  $A \times A$ .
-