

Exercices - Chapitre I

Exercice 1

Les neuf questions sont indépendantes.

- 1) Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 776597 par 43 ?
- 2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.
- 3) Montrer que l'entier $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{26}$ n'est pas premier.
- 4) L'entier 1093 est-il premier ?
- 5) Déterminer les nombres premiers p tels que $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers.
Signalons que la question de savoir s'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ soit premier est ouverte. C'est la conjecture des nombres premiers jumeaux. Des expérimentations numériques rendent plausible cette conjecture.
- 6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est premier, alors n l'est aussi. Expliciter un entier n premier tel que $2^n - 1$ ne le soit pas.
- 7) Montrer que si l'entier $u_n = 1 \dots 1$, constitué de n chiffres 1, est premier, alors n l'est aussi. Expliciter un entier n premier tel que u_n ne le soit pas.
- 8) Soit k un entier naturel. Montrer que 3^k divise $2^{3^k} + 1$. En particulier, il existe une infinité d'entiers n tels que n divise $2^n + 1$.
- 9) Soient a, b, c des entiers relatifs de somme nulle. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $a^4 + b^4 + c^4 = 2d^2$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. Posons $p = 2n + 1$. Démontrer que p est un nombre premier si et seulement si n ne figure pas dans le tableau infini suivant :

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \dots \\ 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & \dots \\ 10 & 17 & 24 & 31 & 38 & \dots \\ 13 & 22 & 31 & 40 & 49 & \dots \\ 16 & 27 & 38 & 49 & 60 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

dans lequel la première colonne est une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3 et la k -ième ligne est une suite arithmétique de raison $2k + 1$.

Exercice 3 (Petit théorème de Fermat)

Soient a un entier relatif et p un nombre premier.

- 1) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq p-1$. Montrer que le coefficient binomial $\binom{p}{k}$, qui est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de cardinal p , est divisible par p .
- 2) En déduire que p divise $a^p - a$. En particulier, si p ne divise pas a , alors p divise $a^{p-1} - 1$.

Exercice 4

Les trois questions sont indépendantes.

- 1) Soient p et q des nombres premiers distincts. Montrer que pq divise $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.
- 2) Déterminer tous les nombres premiers p tels que p divise $2^p + 1$.
- 3) Soient p un nombre premier impair et a, b des entiers non divisibles par p , tels que p divise $a^2 + b^2$. Montrer que 4 divise $p-1$.

Indication pour les trois questions : utiliser le petit théorème de Fermat.

Exercice 5 (Euler)

Montrer qu'il n'existe pas de triplets (x, y, z) dans \mathbb{N}^3 , avec xyz non nul, tels que

$$(1) \quad 4xy - x - y = z^2.$$

Indication : écrire l'égalité (1) sous la forme $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$ et utiliser la question 3 de l'exercice 4.

Signalons qu'il existe une infinité de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, avec $xyz \neq 0$, vérifiant (1). Tel est le cas pour tout $n \in \mathbb{Z}$ du triplet

$$(-1, 2n - 5n^2, 5n - 1).$$

Exercice 6

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 7

Posons $a = 15925$ et $b = 1925$.

- 1) Quel est le plus grand commun diviseur d de a et b ?
- 2) Trouver deux entiers u et v tels que l'on ait $d = au + bv$.
- 3) Quel est le plus petit commun multiple de a et b ?

Exercice 8

Déterminer les entiers n de quatre chiffres tels que les restes des divisions euclidiennes de 21685 et 33509 par n soient respectivement 37 et 53.

Exercice 9

Soient a et b des entiers naturels premiers entre eux. Montrer que $a + b$ et $a^2 + ab + b^2$ sont aussi premiers entre eux.

Exercice 10

Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que l'on ait

$$\text{pgcd}(a, b) + 10 \text{ppcm}(a, b) = 341 \quad \text{avec} \quad a \leq b.$$

Exercice 11

Soient a et m des entiers tels que $a \geq 2$ et $m \geq 1$. Montrer que l'on a

$$\text{pgcd}\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{pgcd}(a - 1, m).$$

Exercice 12

Montrer que tout entier $n \geq 7$ peut s'écrire sous la forme

$$n = a + b \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(a, b) = 1 \quad \text{et} \quad a \geq 2, b \geq 2.$$

Indication : Distinguer la parité de n . Si n est pair, examiner deux cas, suivant que n est multiple de 4 ou pas.

Exercice 13

Soient a et b des entiers naturels, non tous les deux nuls, et d leur pgcd. Montrer que le pgcd de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^d - 1$.

Exercice 14

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $47x + 111y = 1$.

Exercice 15

Dans un banquet, 41 personnes dépensent 40 sous. Chaque homme paie 4 sous, chaque femme 3 sous et chaque enfant 4 deniers. Sachant qu'il y a 12 deniers dans un sou, combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

Exercice 16

Déterminer les entiers de deux chiffres qui s'écrivent uv en base 10 et vu en base 7.

Exercice 17

Soit n un entier naturel non nul. Notons N l'entier dont l'écriture en base 2 est constituée de n chiffres, tous égaux à 1. Déterminer l'écriture de N^2 en base 2.
