

Examen du 20 juin 2018

Durée 2h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

Les cinq questions sont indépendantes.

- 1) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{84} par 11 ?
- 2) Déterminer deux entiers u et v tels que l'on ait

$$451u + 331v = 1.$$

- 3) Soit G un groupe cyclique d'ordre n .
 - 3.1) Quel est le nombre de générateurs de G ?
 - 3.2) En déduire le nombre de générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/150\mathbb{Z}, +)$.
- 4) Existe-t-il un corps de cardinal 143 ?
- 5) Expliciter un corps de cardinal 8.

Exercice 2

Posons

$$K = \mathbb{F}_7[X]/(X^2 + 1).$$

- 1) Montrer que K est un corps.
- 2) Quelle est sa caractéristique ? Quel est son cardinal ?
- 3) Quels sont les ordres possibles des éléments de K^* ?

Soit α la classe de X modulo l'idéal $(X^2 + 1)$.

- 4) Montrer que $\mathcal{B} = (1, \alpha)$ est une base du \mathbb{F}_7 -espace vectoriel K .

Posons $\beta = 3 + 2\alpha$.

- 5) Expliciter les coordonnées de β^2 , β^4 et β^8 dans \mathcal{B} .
- 6) En déduire l'ordre de β dans K^* .
- 7) Quel est l'ordre de 2β dans K^* ?
- 8) Calculer les coordonnées de l'inverse de β dans \mathcal{B} .

Exercice 3

Considérons l'anneau $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^3)$.

Soit α la classe de X modulo l'idéal (X^3) . On rappelle que $(1, \alpha, \alpha^2)$ est une base du \mathbb{F}_2 -espace vectoriel A .

- 1) Quel est le cardinal de A ?
 - 2) Montrer que A n'est pas intègre.
 - 3) Expliciter les éléments de A : on écrira chaque élément de A comme une combinaison linéaire de $1, \alpha$ et α^2 .
 - 4) Décrire le groupe A^* des éléments inversibles de A .
 - 5) Montrer que A^* est un groupe cyclique.
 - 6) Quels sont les générateurs de A^* ?
-