

Correction des exercices - Chapitre I

Exercice 1

- 1) On vérifie que l'on a $776597 = 43 \times 18060 + 17$. Le quotient est donc 18060 et le reste est 17.
- 2) Soit n un entier naturel tel que $n + 1$ divise $n^2 + 1$. Vérifions que l'on a $n = 0$ ou $n = 1$. On écrit pour cela que l'on a

$$n^2 + 1 = (n - 1)(n + 1) + 2.$$

Par suite, $n + 1$ divise 2, d'où notre assertion.

- 3) L'entier $N = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{26}$ est divisible par 7. En effet, on a les égalités

$$N = 2^{27} - 1 = (2^3)^9 - 1 = (2^3 - 1)((2^3)^8 + \dots + 2^3 + 1) = 7 \times 19173961.$$

- 4) La racine carrée de 1093 est plus petite que 34. Les nombres premiers plus petits que 34 sont

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.$$

Ils ne divisent pas 1093, donc 1093 est premier.

- 5) Le seul nombre premier vérifiant la condition de l'énoncé est 3. En effet, soit p un nombre premier tel que $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers. Si 3 divise $p - 1$, (resp. $p - 2$), alors $p + 2$ (resp. $p + 4$) est divisible par 3. Les entiers $p + 2$ et $p + 4$ étant distincts de 3, on en déduit que 3 divise p , d'où $p = 3$. Par ailleurs, 5 et 7 sont premiers.
- 6) Si n n'est pas premier, il possède un diviseur a tel que $1 < a < n$. L'entier $2^a - 1$ est donc un diviseur strict de $2^n - 1$ qui n'est donc pas premier. Par ailleurs, 11 est premier et on a

$$2^{11} = 23 \times 89.$$

- 7) Soit n un entier non premier. Il existe des entiers a et b strictement plus grands que 1 tels que l'on ait $n = ab$. On a l'égalité

$$u_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

On obtient

$$u_n = \frac{10^{ab} - 1}{9} = \frac{10^{ab} - 1}{10^a - 1} \times \frac{10^a - 1}{9},$$

et u_n est donc le produit de deux entiers strictement plus grands que 1, autrement dit, u_n n'est pas premier, d'où le résultat. Par ailleurs, on a $u_3 = 111$, qui est divisible par 3 (bien que 3 soit premier).

- 8) L'énoncé est vrai si $k = 0$. Soit k un entier naturel tel que 3^k divise $2^{3^k} + 1$. On a

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{2 \cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1).$$

On a

$$2^{2 \cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1 = 2^{2 \cdot 3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1).$$

L'entier $2^{2 \cdot 3^k} + 2$ est divisible par 3. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $2^{3^{k+1}} + 1$ est divisible par 3^{k+1} , d'où l'assertion.

- 9) On vérifie que l'on a

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

Exercice 2

Le coefficient de la première colonne et de la k -ième ligne du tableau est $4 + 3(k - 1)$. Ainsi, le coefficient de la k -ième ligne et de la j -ième colonne de ce tableau est

$$4 + 3(k - 1) + (j - 1)(2k + 1) = 2kj + k + j.$$

Supposons que n apparaisse dans ce tableau. Il existe alors deux entiers non nuls k et j tels que l'on ait $n = 2kj + k + j$, d'où $p = (2k + 1)(2j + 1)$ et p n'est pas premier. Inversement, si p n'est pas premier, il est le produit de deux entiers impairs i.e. il existe k et j , supérieurs ou égaux à 1, tels que l'on ait $p = (2k + 1)(2j + 1)$. Vu l'égalité $n = (p - 1)/2$, on en déduit que n est le coefficient de la k -ième ligne et de la j -ième colonne du tableau.

Exercice 3 (Petit théorème de Fermat)

- 1) On a l'égalité

$$k!(p - k)! \binom{p}{k} = p!.$$

En particulier, p divise $k!(p - k)! \binom{p}{k}$. Cela entraîne le résultat vu que p est premier et que p ne divise pas $k!(p - k)!$.

- 2) On vérifie directement que l'assertion est vraie si $p = 2$. On peut donc supposer $p \geq 3$ et de plus $a \geq 1$. On procède alors par récurrence sur a . L'énoncé est vrai si $a = 1$. Supposons qu'il le soit pour un entier $a \geq 1$. D'après la formule du binôme de Newton et la question 1, l'entier $(a + 1)^p - (a^p + 1)$ est divisible par p . D'après l'hypothèse

de récurrence, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^p = a + kp$. Par suite, $(a + 1)^p - (a + 1)$ est divisible par p , d'où le résultat.

Exercice 4

- 1) On a $p \neq q$. D'après le petit théorème de Fermat, p divise donc $q^{p-1} - 1$. Ainsi p divise $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$. Il en est de même de q , cela entraîne le résultat.
- 2) Soit p un nombre premier divisant $2^p + 1$. Vérifions que $p = 3$. D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$. On en déduit que p divise $2^p + 1 - (2^p - 2) = 3$, d'où $p = 3$. Inversement, 3 divise $2^3 + 1$.
- 3) Parce que p ne divise pas a , il existe un entier u tel que p divise $au - 1$ (par exemple a^{p-2} ; on peut aussi évoquer le théorème de Bézout : a et p étant premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + pv = 1$). Posons $d = bu$. Par hypothèse p divise $a^2 + b^2$, donc p divise $d^2 + 1$. Vu que p ne divise pas d , l'entier

$$(d^2)^{\frac{p-1}{2}} - 1 = d^{p-1} - 1$$

est divisible par p (petit th. de Fermat). Puisque d^2 est de la forme $-1 + kp$ où $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que p divise $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1$, donc $\frac{p-1}{2}$ est pair, autrement dit 4 divise $p - 1$.

Exercice 5 (Euler)

Supposons qu'il existe des entiers naturels x, y et z non nuls tels que $4xy - x - y = z^2$. On a $4x - 1 \geq 3$ et cet entier possède un diviseur premier p dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3 (on dit que p est congru à 3 modulo 4, terminologie définie dans le chapitre II) ; en effet, dans le cas contraire, 1 serait le reste de la division euclidienne de $4x - 1$ par 4, ce qui n'est pas. De l'égalité $(4x - 1)(4y - 1) = (2z)^2 + 1$, on déduit que p divise $(2z)^2 + 1$ et que p ne divise pas z . La question 3 de l'exercice 4 conduit alors à une contradiction.

Exercice 6

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel i.e. qu'il existe des entiers naturels a et b tels que l'on ait $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On obtient $2b^2 = a^2$. On a ainsi l'égalité des valuations 2-adiques

$$1 + 2v_2(b) = 2v_2(a).$$

Or $1 + 2v_2(b)$ est impair et $2v_2(a)$ est pair, d'où une contradiction et l'assertion.

Exercice 7

- 1) On utilise l'algorithme d'Euclide. Conformément à cet algorithme, on obtient le tableau suivant :

	8	3	1	2	
15925	1925	525	350	175	0
1	0	1	-3	4	
0	1	-8	25	-33	

On en déduit que l'on a $d = 175$.

Signalons que les décompositions de a et b en produit de nombres premiers sont

$$(1) \quad 15925 = 5^2 \times 7^2 \times 13 \quad \text{et} \quad 1925 = 5^2 \times 7 \times 11,$$

on retrouve ainsi $d = 5^2 \times 7 = 175$.

2) Il résulte du calcul précédent que l'on a l'égalité

$$175 = 4 \times 15925 - 33 \times 1925.$$

Le couple $(u, v) = (4, -33)$ répond ainsi à la question.

3) Le ppcm de a et b est

$$m = \frac{ab}{\text{pgcd}(a, b)} = 175175.$$

On peut aussi le déduire de (1), et on obtient directement

$$m = 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13.$$

Exercice 8

Soit n un entier réalisant la condition de l'énoncé. Il existe deux entiers q et q' tels que l'on ait

$$21685 = nq + 37 \quad \text{et} \quad 33509 = nq' + 53.$$

On a ainsi

$$21648 = nq \quad \text{et} \quad 33456 = nq'.$$

Il en résulte que n divise le pgcd de 21648 et 33456. En utilisant l'algorithme d'Euclide, on vérifie que l'on a le tableau suivant :

	1	1	1	5	
33456	21648	11808	9840	1968	0

Par suite, le pgcd de 21648 et 33456 est 1968. On en déduit que 1968 est le seul entier répondant à la question.

Exercice 9

Supposons qu'il existe un nombre premier p divisant $a + b$ et $a^2 + ab + b^2$. On a $a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab$, donc p divise ab , et p divise a ou b . Puisque p divise $a + b$, on en déduit que p divise a et b , d'où une contradiction car a et b sont premiers entre eux.

Exercice 10

Soient a et b deux entiers naturels non nuls vérifiant la condition demandée. Soient d leur pgcd et m leur ppcm. L'entier d divise m , donc d divise $341 = 11 \times 31$. Puisque m n'est pas nul, on a $d < 341$, d'où $d = 1, 11, 31$. Par ailleurs, on a $md = ab$. Si $d = 1$, on a $m = 34$, d'où $ab = 34$, puis $(a, b) = (1, 34)$ ou $(2, 17)$. Si $d = 11$, on a $m = 33$, d'où $ab = 3 \times 11^2$, puis $(a, b) = (11, 33)$. Si $d = 31$, on a $m = 31$, $ab = 31^2$, d'où $(a, b) = (31, 31)$. Inversement, on vérifie que les éléments de l'ensemble

$$\{(1, 34), (2, 17), (11, 33), (31, 31)\}$$

satisfont à la condition de l'énoncé. C'est donc l'ensemble cherché.

Exercice 11

On a

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + \dots + a + 1.$$

En utilisant l'égalité $a = 1 + (a - 1)$, on déduit l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = k(a - 1) + m.$$

L'ensemble des diviseurs communs de $\frac{a^m - 1}{a - 1}$ et $a - 1$ est donc l'ensemble des diviseurs communs de $a - 1$ et m , ce qui implique le résultat.

Exercice 12

Si n est impair, la décomposition $n = a + b$ avec $a = 2$ et $b = n - 2$ convient. Supposons n multiple de 4. En posant $n = 4k$, on a $n = a + b$ avec $a = 2k - 1$ et $b = 2k + 1$. Deux nombres impairs consécutifs étant premiers entre eux, on obtient l'assertion dans ce cas. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 2$. On a alors $n = a + b$ avec $a = 2k + 3$ et $b = 2k - 1$. L'inégalité $n \geq 7$ entraîne $k \geq 2$, donc a et b sont au moins égaux à 2. On a $a - b = 4$, donc le pgcd de a et b divise 4. Puisque a et b sont impairs, ils sont donc premiers entre eux, d'où le résultat.

Exercice 13

Utilisons l'algorithme d'Euclide. Il existe q et r dans \mathbb{N} tels que l'on ait $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. On a les égalités

$$2^a - 1 = (2^b)^q 2^r - 1 = ((2^b)^q - 1)2^r + (2^r - 1).$$

Par ailleurs, $2^b - 1$ divise $(2^b)^q - 1$. Il existe donc $t \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$2^a - 1 = (2^b - 1)t + 2^r - 1.$$

On a $0 \leq 2^r - 1 < 2^b - 1$, donc $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$. Puisque d est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide de division de a par b , il en résulte que $2^d - 1$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide de division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$, d'où l'assertion.

Exercice 14

On détermine une solution particulière en utilisant l'algorithme d'Euclide. On obtient le tableau suivant :

	2	2	1	3	
111	47	17	13	4	1
1	0	1	-2	3	-11
0	1	-2	5	-7	26

On en déduit l'égalité $26 \times 47 - 11 \times 111 = 1$. L'ensemble des solutions est donc formé des couples $(26 + 111k, -11 - 47k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15

Soient x , y et z respectivement le nombre d'hommes, de femmes et d'enfants. Compte tenu des hypothèses faites, on a les égalités

$$(1) \quad x + y + z = 41 \quad \text{et} \quad 4x + 3y + \frac{z}{3} = 40,$$

autrement dit, on a

$$x + y + z = 41 \quad \text{et} \quad 12x + 9y + z = 120.$$

Par soustraction de ces deux égalités, on obtient

$$11x + 8y = 79.$$

Le couple $(5, 3)$ vérifie cette égalité. Par suite, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$x = 5 + 8k \quad \text{et} \quad y = 3 - 11k.$$

Puisque x et y sont des entiers naturels, on a $k = 0$, d'où $x = 5$, $y = 3$ puis $z = 33$. Inversement, le triplet $(x, y, z) = (5, 3, 33)$ vérifie les conditions (1), c'est donc la solution cherchée.

Exercice 16

Soit n un tel entier. On a

$$n = v + 10u \quad \text{et} \quad n = u + 7v.$$

On obtient $2v = 3u$, donc 2 divise u et 3 divise v . On a $0 \leq u, v < 6$, d'où $(u, v) = (2, 3)$ ou $(u, v) = (4, 6)$. Cela conduit à $n = 23$ ou $n = 46$.

Exercice 17

On a $N = 2^{n-1} + \dots + 1 = 2^n - 1$, d'où les égalités

$$N^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^{n-1} - 1) + 1.$$

Autrement dit, on a

$$N^2 = 2^{n+1}(2^{n-2} + \dots + 1) + 1 = 2^{2n-1} + 2^{2n-2} + \dots + 2^{n+1} + 1.$$

L'écriture de N^2 en base 2 est donc

$$N^2 = 1 \dots 10 \dots 01,$$

dans laquelle apparaît (de gauche à droite) $n - 1$ fois le chiffre 1, n fois le chiffre 0 et le chiffre 1.
