

## Exercices - Chapitre III

### Exercice 1 (Anneaux de Boole)

Soit  $A$  un anneau tel que pour tout  $a \in A$ , on ait  $a^2 = a$ . Un tel anneau s'appelle un anneau de Boole.

- 1) Pour tous  $a, b \in A$ , montrer que  $ab + ba = 0$ .
- 2) Pour tout  $a \in A$ , en déduire que  $a = -a$ .
- 3) En déduire que  $A$  est commutatif.
- 4) Si  $A$  possède au moins trois éléments, montrer que  $A$  n'est pas intègre.
- 5) Si  $A$  est de cardinal 2, montrer que  $A$  est intègre.
- 6) Donner un exemple d'anneau de Boole.

### Exercice 2

Soit  $A$  un anneau tel que pour tous  $a, b \in A$ , on ait  $a^2b^2 = (ab)^2$ .

Soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $A$ .

- 1) Pour tous  $a, b \in A$ , montrer que l'on a  $bab = ab^2$ .

**Indication :** Utiliser l'égalité  $((1+a)b)^2 = (1+a)^2b^2$ .

- 2) En déduire que  $A$  est commutatif.

**Indication :** Utiliser l'égalité  $(1+b)a(1+b) = a(1+b)^2$ .

### Exercice 3

Soit  $A$  un anneau. Soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $A$  tels que  $1 - ab$  soit inversible. Montrer que  $1 - ba$  est inversible, d'inverse  $1 + b(1 - ab)^{-1}a$ .

### Exercice 4

Soit  $A$  un anneau commutatif non nul. Montrer que  $A$  est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont  $\{0\}$  et  $A$ .

### Exercice 5

Soient  $K$  un corps commutatif,  $A$  un anneau non nul et  $f : K \rightarrow A$  un homomorphisme d'anneaux. Montrer que  $f$  est injectif.

### Exercice 6

Soient  $A$  et  $B$  des anneaux commutatifs et  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme surjectif d'anneaux. Montrer que l'image par  $f$  d'un idéal de  $A$  est un idéal de  $B$ .

### Exercice 7

Montrer qu'un anneau intègre qui ne possède qu'un nombre fini d'idéaux est un corps.

**Indication :** Soit  $x$  un élément non nul de  $A$ . Il s'agit de montrer que  $x$  est inversible. Pour cela, considérer la suite des idéaux principaux  $(x^n A)_{n \in \mathbb{N}}$  et remarquer que  $x^{n+1}A$  est contenu dans  $x^n A$ .

### Exercice 8

Posons  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$  et  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ .

- 1) Montrer que ce sont des sous-anneaux de  $\mathbb{C}$ .
- 2) Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphismes d'anneaux de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .

### Exercice 9 (Idéaux premiers)

Soit  $A$  un anneau commutatif. Un idéal  $\mathfrak{p}$  de  $A$  est dit premier si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) on a  $\mathfrak{p} \neq A$ .
- (2) Pour tous  $x, y \in A$ , si  $xy$  est dans  $\mathfrak{p}$ , alors  $x$  ou  $y$  est dans  $\mathfrak{p}$ .

- 1) Montrer que les idéaux premiers de  $\mathbb{Z}$  sont l'idéal nul et les idéaux  $p\mathbb{Z}$  où  $p$  est un nombre premier.
- 2) Si  $A$  est un corps, quels sont ses idéaux premiers ?
- 3) Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Montrer que  $A/I$  est intègre si et seulement si  $I$  est un idéal premier de  $A$ .

### Exercice 10 (Éléments nilpotents)

Soit  $A$  un anneau commutatif. Un élément  $x \in A$  est dit nilpotent s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que l'on ait  $x^n = 0$ . L'ensemble des éléments nilpotents de  $A$  s'appelle le nilradical de  $A$ .

- 1) Montrer que le nilradical de  $A$  est un idéal de  $A$ .
- 2) Soit  $x \in A$  un élément nilpotent. Montrer que  $1 - x$  est inversible.
- 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le nilradical de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### Exercice 11 (Anneaux principaux)

Soit  $A$  un anneau. On dit que  $A$  est principal, s'il est intègre et si tous ses idéaux sont principaux.

- 1) Montrer que les corps commutatifs sont des anneaux principaux.
- 2) Montrer que  $\mathbb{Z}$  est principal.
- 3) L'objectif de cette question est de montrer que l'anneau  $\mathbb{Z}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  n'est pas principal. Signalons à ce sujet que le degré d'un polynôme  $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$ , avec  $a_n \neq 0$ , est  $n$ . Le degré d'un produit de polynômes non nuls est donc la somme de leurs degrés ( $\mathbb{Z}$  est intègre). Posons

$$I = \{2P + XQ \mid P, Q \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Montrer que  $I$  n'est pas un idéal principal.

**Indication :** Procéder par l'absurde et utiliser la notion de degré.

### Exercice 12 (Anneaux euclidiens)

Un anneau  $A$  est dit euclidien si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) il est intègre.
- (2) Il existe une application  $\sigma : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tous  $a$  et  $b$  dans  $A$  avec  $b \neq 0$ , il existe  $q$  et  $r$  dans  $A$  tels que l'on ait

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma(r) < \sigma(b).$$

On dit que  $\sigma$  est un stathme euclidien.

- 1) Montrer que tout anneau euclidien est principal.
- 2) Donner un exemple d'anneau euclidien.

### Exercice 13 (L'anneau des entiers de Gauss)

Posons  $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$  où  $i^2 = -1$ .

- 1) Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
- 2) Déterminer le groupe des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ . Montrer qu'il est cyclique d'ordre 4.

Soit  $\sigma : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application définie pour tout  $z \in \mathbb{Z}[i]$  par

$$\sigma(z) = |z|^2,$$

où  $|z|$  désigne le module du nombre complexe  $z$ .

- 3) Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un anneau euclidien, avec  $\sigma$  comme stathme euclidien. En particulier,  $\mathbb{Z}[i]$  est principal.
- 4) Posons  $a = 11 + 7i$  et  $b = 3 + 7i$ . Déterminer un couple  $(q, r) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$  tel que l'on ait  $a = bq + r$  avec  $\sigma(r) < \sigma(b)$ .