

Exercices - Chapitre II

Exercice 1

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e .

- 1) Montrer que si pour tout $x \in G$, on a $x^2 = e$, alors G est abélien.
- 2) Supposons que G soit un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe $x \in G$, distinct de e , tel que $x^2 = e$, autrement dit que G a un élément d'ordre 2.
- 3) Supposons que G possède un unique élément x d'ordre 2. Montrer que pour tout $y \in G$, on a $xy = yx$.

Exercice 2

Soit G un groupe. Montrer que la réunion de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G si et seulement si l'un est contenu dans l'autre.

Exercice 3

Notons G le groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

- 1) Quel est l'ordre de $\bar{3}$ dans G ?
- 2) Décrire le sous-groupe de G engendré par $\bar{3}$.
- 3) Décrire tous les sous-groupes de G .
- 4) Expliciter les générateurs de G .

Exercice 4

Soit G un groupe abélien additif. Notons 0 son élément neutre et S la somme de ses éléments.

- 1) Montrer que l'on a $2S = 0$.
- 2) Si G est d'ordre impair, montrer que l'on a $S = 0$.
- 3) Supposons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geq 1$. Calculer S .

Exercice 5

Soit H un sous-groupe de \mathbb{Z} . Montrer qu'il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

Exercice 6

Montrer que tout sous-groupe fini de (\mathbb{C}^*, \times) est cyclique.

Exercice 7

Soient G_1 et G_2 des groupes finis, et (x, y) un élément du groupe produit $G_1 \times G_2$.

- 1) Montrer que l'ordre de (x, y) est le plus petit commun multiple de l'ordre de x et de celui de y .
- 2) Prenons pour G_1 (resp. G_2) le groupe additif $\mathbb{Z}/1200\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/350\mathbb{Z}$). Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{3}, \bar{5}) \in G_1 \times G_2$?

Exercice 8

- 1) Montrer que dans un groupe fini d'ordre impair, tout élément est un carré.

Soit G un groupe cyclique d'ordre n pair.

- 2) Montrer que G possède exactement $\frac{n}{2}$ éléments qui sont des carrés.

Indication : Considérer le noyau et l'image de l'homomorphisme de G dans G qui à x associe x^2 .

- 3) Soit a un élément de G . Montrer que a est un carré dans G si et seulement si on a $a^{\frac{n}{2}} = e$, où e est l'élément neutre de G .
- 4) Supposons que n soit une puissance de 2. Montrer que l'ensemble des générateurs de G est l'ensemble de ses éléments qui ne sont pas des carrés.

Exercice 9

Soit G un groupe multiplicatif. Pour tous sous-groupes A et B de G , on désigne par AB le sous-ensemble de G dont les éléments sont de la forme ab , où a est dans A et b est dans B .

- 1) Soient H et K des sous-groupes de G . Démontrer que $HK=KH$ si et seulement si HK est un sous-groupe de G .
- 2) Prenons pour G le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{Z} dont le déterminant est 1. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1) Déterminer les ordres de M et N dans G .

2.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(MN)^n$. En déduire que MN n'est pas d'ordre fini dans G .

2.3) Soit H (resp. K) le sous-groupe de G engendré par M (resp. N). Montrer que HK n'est pas un groupe.

Exercice 10

Soit $n \geq 1$ un entier. Notons $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n .

- 1) Déterminer $d(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n .
- 2) Montrer que n est un carré si et seulement si $d(n)$ est impair.
- 3) Trouver tous les entiers $n \leq 30$ tels que $d(n) = \varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

Exercice 11

Dans le groupe $(\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}, +)$, résoudre l'équation $5x = \overline{50}$.

Exercice 12

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e .

- 1) Montrer que si l'application de G dans G , qui à tout $x \in G$ associe x^{-1} , est un homomorphisme, alors G est abélien.
Notons $\text{Id} : G \rightarrow G$ l'identité de G . Soit $\sigma : G \rightarrow G$ un homomorphisme, tel que l'on ait $\sigma \neq \text{Id}$ et $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$. On suppose que e est le seul élément de G fixé par σ .
- 2) Montrer que l'application $f : G \rightarrow G$, définie pour tout $a \in G$ par $f(a) = \sigma(a^{-1})a$, est injective.
- 3) Si G est fini, en déduire que G est abélien d'ordre impair.

Exercice 13

Soient m et n des entiers naturels tels que $n \neq 0$. L'objectif de cet exercice est d'établir que le nombre d'homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le plus grand commun diviseur de m et n .

- 1) Si m et n sont premiers entre eux, montrer que le seul homomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'homomorphisme nul.

Passons au cas général. Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini. Notons 0 son élément neutre et posons

$$H = \{x \in G \mid mx = 0\}.$$

- 2) Montrer que H est un sous-groupe de G .
- 3) Soit $\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à valeurs dans G . Pour tous $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G)$ et $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, posons

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Cette loi de composition interne munie $\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G)$ d'une structure de groupe abélien. Soit

$$\psi : \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) \rightarrow H$$

l'application définie pour tout $f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G)$ par la relation

$$\psi(f) = f(\bar{1}).$$

Montrer que ψ est un isomorphisme de groupes.

Supposons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Posons $d = \text{pgcd}(m, n)$.

- 4) Montrer que H est d'ordre d .
 - 5) En déduire que le groupe $\text{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est d'ordre d .
 - 6) Expliciter le groupe $\text{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.
-