

Chapitre V - Fonctions continues

On va exposer ici les principales propriétés des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} . Une introduction à ces fonctions se trouve dans le premier chapitre. Soient X une partie de \mathbb{R} et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions réelles définies sur X . Rappelons que f est dite continue en un point $a \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout x suffisamment voisin de a , ce qui signifie que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $f(a)$. Si f et g sont continues en a , il en est de même des fonctions $f + g$ et fg . De plus, si $g(a)$ n'est pas nul, alors $g(x)$ est non nul au voisinage de a et la fonction $\frac{f}{g}$, définie pour $g(x) \neq 0$, est continue en a .

Par ailleurs, si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, alors tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est dans l'image de f (théorème des valeurs intermédiaires). En particulier, si l'on a $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. En utilisant une caractérisation simple des intervalles de \mathbb{R} , on en a déduit que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans ce chapitre.

Table des matières

1. Exemples - Continuité et discontinuité	1
2. Continuité uniforme	5
3. Image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue	8
4. Fonctions monotones	9
5. Monotonie et continuité	11
6. La fonction racine n -ième	13
7. La fonction logarithme népérien	14
8. La fonction exponentielle de base a	15
9. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques	16

1. Exemples - Continuité et discontinuité

Les premiers exemples de fonctions continues sur leurs domaines de définition, sont les fonctions polynômes, les fractions rationnelles, ainsi que les fonctions trigonométriques i.e. les fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente. On a en fait démontré que les fonctions

trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définition pour la raison qu'elles y sont dérivables. Voyons maintenant qu'il en est de même de la fonction exponentielle. Plus précisément :

Proposition 5.1. *La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$ son nombre dérivé en x est e^x . En particulier, elle est continue sur \mathbb{R} .*

Démonstration : Soit x un nombre réel. Il s'agit de vérifier que l'on a

$$(1) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.$$

Compte tenu de la relation $e^{x+h} = e^x e^h$, il suffit de démontrer que l'on a

$$(2) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

autrement dit, que la fonction exponentielle est dérivable en 0, et que son nombre dérivé en 0 vaut 1. Afin de prouver la formule (2), le plus simple est de revenir à la définition, auquel cas la démonstration est la même que celle du lemme 4.10. Considérons en effet un nombre réel $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait l'implication

$$(3) \quad h \neq 0 \text{ et } |h| < \alpha \implies \left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Soient h un nombre réel tel que $0 < |h| < 1$ et n un entier naturel non nul. On a

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{h^k}{n^k} = 1 + h + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{h^k}{n^k},$$

d'où les inégalités

$$\left| \frac{1}{h} \left(\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1 \right) - 1 \right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{C_n^k}{n^k} |h|^{k-1} \leq \sum_{k=2}^n |h|^{k-1} \leq \frac{|h|}{1 - |h|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que

$$|h| < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}.$$

Posons alors

$$v_n(h) = \frac{1}{h} \left(\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1 \right).$$

Par définition, on a

$$\lim v_n(h) = \frac{e^h - 1}{h},$$

et pour tout n assez grand, on a donc

$$\left| v_n(h) - \frac{e^h - 1}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant n assez grand, si l'on a $|h| < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, on obtient les inégalités

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \left| \frac{e^h - 1}{h} - v_n(h) \right| + |v_n(h) - 1| < \varepsilon.$$

Cela prouve la condition (3) avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, d'où la formule (1).

Exemples 5.1

Illustrons à travers des exemples les résultats dont on dispose à ce stade sur les fonctions continues.

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par les égalités

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Vérifions que f est continue sur \mathbb{R} . Tout d'abord, la proposition 5.1 et les théorèmes généraux sur les fonctions continues entraînent que f est continue sur \mathbb{R}^* . Le fait que f soit continue en 0 est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5.1. *On a les égalités*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration : D'après la proposition 4.4, on a

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{pour tout } x \geq 0,$$

ce qui entraîne l'assertion.

2) L'énoncé qui suit est parfois utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue, i.e. est discontinue, en un point.

Lemme 5.2. *Soient X une partie de \mathbb{R} et f une fonction définie sur X à valeurs dans \mathbb{R} . Soit a un point de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) f est continue en a .
- 2) Pour toute suite (u_n) d'éléments de X qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Démonstration : Le fait que la première condition entraîne la seconde a déjà été démontré (cor. 2.3). Inversement, supposons f discontinue au point a . Il existe alors un

nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que la condition suivante soit satisfaite : pour tout $n \geq 1$, il existe un élément $u_n \in X$ tel que l'on ait

$$|u_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(a)| > \varepsilon.$$

On en déduit l'existence d'une suite (u_n) d'éléments de X convergente de limite a telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$, d'où le résultat.

Comme application de ce résultat, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

D'après les théorèmes généraux f est continue sur \mathbb{R}^* . Vérifions que f n'est pas continue en 0. La suite (u_n) de terme général

$$u_n = \frac{1}{n\pi},$$

est convergente de limite 0 et l'on a $f(u_n) = (-1)^n$, donc la suite $(f(u_n))$ n'est pas convergente, d'où l'assertion.

3) Nous avons constaté qu'il existe des fonctions sur \mathbb{R} partout discontinues, par exemple la fonction caractéristique des rationnels (exemple 1.10). Il existe aussi des fonctions sur \mathbb{R} continues en un seul point. Tel est le cas de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Elle est continue en 0 et discontinue en tout autre point. En effet, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq |x|$ i.e. $|f(x) - f(0)| \leq |x|$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ dès que $|x| < \varepsilon$, d'où le fait que f soit continue en 0. Soit alors x_0 un nombre réel non nul. Supposons x_0 rationnel (resp. irrationnel). Posons $\varepsilon = |x_0|$. On a $\varepsilon > 0$. Soit α un nombre réel strictement positif. Il existe x dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (resp. dans \mathbb{Q}) tel que l'on ait

$$x_0 < x < x_0 + \alpha \quad \text{si } x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_0 - \alpha < x < x_0 \quad \text{si } x_0 < 0.$$

On a donc $|x - x_0| < \alpha$ et $|x| > |x_0|$. Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $|f(x) - f(x_0)| = |x_0|$, et si $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on a $|f(x) - f(x_0)| = |x|$. Dans les deux cas on obtient $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, ce qui prouve que f n'est pas continue en x_0 .

4) Voici un exemple d'une fonction définie sur \mathbb{R} , discontinue en tout nombre rationnel et continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit. Si x est irrationnel, on pose $f(x) = 0$. Si x est rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec p et q

premiers entre eux, tels que $x = \frac{p}{q}$. On pose alors $f(x) = \frac{1}{q}$. Vérifions que f satisfait les conditions annoncées.

Soit x_0 un nombre rationnel. On a $f(x_0) > 0$. Il existe un nombre réel ε vérifiant les inégalités $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Soit α un nombre réel > 0 . Puisque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , il existe x dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_0| < \alpha$. On obtient $|f(x) - f(x_0)| = f(x_0) > \varepsilon$, ce qui prouve que f n'est pas continue en x_0 .

Soit x_0 un nombre irrationnel. Soit ε un nombre réel > 0 . Considérons l'ensemble

$$E = \left\{ x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \mid f(x) \geq \varepsilon \right\}.$$

C'est un ensemble fini. En effet, E est un sous-ensemble de \mathbb{Q} . Par ailleurs, si $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux, est un élément de E , on a $f(x) = \frac{1}{q}$, d'où

$$q \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par ailleurs, on a $|x - x_0| \leq 1$, d'où $|p - qx_0| \leq q$ puis $|p| \leq q(1 + |x_0|)$, ce qui conduit à

$$|p| \leq \frac{1 + |x_0|}{\varepsilon},$$

d'où notre assertion. Il en résulte l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que l'intersection $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap E$ soit vide. Pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ on a ainsi

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) < \varepsilon,$$

et f est donc continue en x_0 .

2. Continuité uniforme

Cette notion généralise celle de continuité et est très utile dans l'étude des fonctions continues, notamment celles qui sont définies sur des intervalles fermés et bornés. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que sur ce type d'intervalles ces deux notions coïncident (théorème de Heine).

Définition 5.1. Soient X une partie de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur X . On dit que f est uniformément continue sur X si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x et y dans X , on ait l'implication

$$(4) \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Une fonction uniformément continue sur X est en particulier continue sur X . Dans cette définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un choix uniforme de α pour lequel on ait

l'implication (4), contrairement où dans la définition d'une fonction continue en un point a , le choix de α exprimant le fait que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dès que $|x - a| < \alpha$, dépend de a .

On notera que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur X , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x, y \in X$ tels que l'on ait $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Exemples 5.2.

1) Soient a et b des nombres réels. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est uniformément continue sur \mathbb{R} . En effet, on peut supposer $a \neq 0$, auquel cas, pour tout $\varepsilon > 0$, et tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'implication

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{|a|} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe x^2 . Bien que continue sur \mathbb{R} , elle n'y est pas uniformément continue. En effet, posons $\varepsilon = 1$ et considérons un nombre réel $\alpha > 0$. Soient x et y des réels tels que

$$x > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad y = x + \frac{\alpha}{2}.$$

L'assertion résulte alors des inégalités

$$|x - y| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| = \left| \alpha x + \frac{\alpha^2}{4} \right| > \alpha x > 1 = \varepsilon.$$

Cela étant, la restriction de f à tout intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$, comme on le constate en utilisant la définition et en remarquant que pour tous x et y dans $[a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y)(x + y)| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2 \max(|a|, |b|)|x - y|.$$

3) Posons $X = [-1, 1] - \{0\}$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est continue sur X . Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue sur X . Posons $\varepsilon = 1$. Soit α un nombre réel > 0 . Supposons $\alpha \geq 1$. Avec $x = 1$ et $y = \frac{1}{3}$, on obtient

$$|x - y| = \frac{2}{3} < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| = 2 > \varepsilon.$$

Supposons $\alpha < 1$. Avec $x = \alpha$ et $y = \frac{\alpha}{2}$, on a

$$|x - y| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| = \frac{1}{\alpha} > \varepsilon,$$

d'où l'assertion. Comme ci-dessus, la restriction de f à tout intervalle fermé borné contenu dans X est uniformément continue. Par exemple, sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$, on le constate en remarquant que pour tous $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{xy} \leq 4|x - y|.$$

Proposition 5.2. *Soient X une partie bornée de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur X . Alors f est bornée sur X .*

Démonstration : Supposons f non bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un élément $x_n \in X$ tel que l'on ait $|f(x_n)| \geq n$, d'où l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de X telle que cette inégalité soit satisfaite. Puisque X est bornée, la suite (x_n) est aussi bornée. D'après le théorème de Bolzano -Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente, autrement dit, il existe une application $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\rho(n)})$ soit convergente.

Soit ε un nombre réel > 0 . Puisque f est uniformément continue sur X , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \alpha$. La suite $(x_{\rho(n)})$ étant convergente, elle est de Cauchy. Il existe donc un entier n_0 tel que l'on ait $|x_{\rho(p)} - x_{\rho(q)}| < \alpha$ pour tous $p, q \geq n_0$. On obtient ainsi

$$|f(x_{\rho(p)}) - f(x_{\rho(q)})| < \varepsilon \quad \text{pour tous } p, q \geq n_0.$$

Il en résulte que la suite $(f(x_{\rho(n)}))$ est de Cauchy, elle est donc bornée (lemme 2.11). Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f(x_{\rho(n)})| \geq \rho(n) \geq n,$$

d'où une contradiction et le résultat.

Le résultat précédent est parfois utile pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue. Par exemple, il en résulte directement que la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $[-1, 1] - \{0\}$.

On en déduit le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 5.1 (Théorème de Heine). *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Supposons qu'elle ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $[a, b]$ tels que pour tout n on ait

$$(5) \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

La suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano -Weierstrass, il existe donc une application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\rho(n)})$ soit convergente. Soit ℓ sa limite. Pour tout n , on a $y_{\rho(n)} = x_{\rho(n)} + (y_{\rho(n)} - x_{\rho(n)})$. On déduit de la première inégalité de (5) que la suite $(y_{\rho(n)} - x_{\rho(n)})$ est convergente de limite nulle, donc la suite $(y_{\rho(n)})$ est convergente de limite ℓ . Par ailleurs, on a $a \leq x_n \leq b$, d'où $a \leq \ell \leq b$. La fonction f étant continue en ℓ , les suites $(f(x_{\rho(n)}))$ et $(f(y_{\rho(n)}))$ sont convergentes vers $f(\ell)$. La suite $(f(x_{\rho(n)}) - f(y_{\rho(n)}))$ converge donc vers 0, ce qui contredit la seconde inégalité de (5). Cela établit le théorème.

Exemple 5.3. Comme application du théorème de Heine, prouvons l'énoncé suivant. Soient a un nombre réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On suppose que f possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Alors, f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

Notons ℓ la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Soit ε un nombre réel > 0 . Il existe un nombre réel $b > a$ tel que l'on ait $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{4}$ dès que $x \geq b$. En particulier, on a

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quels que soient } s, t \geq b.$$

Par ailleurs, f étant uniformément continue sur l'intervalle $[a, b]$ (th. 5.1), il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $u, v \in [a, b]$, on ait l'implication

$$|u - v| < \alpha \implies |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient alors $c, d \in [a, +\infty[$ tels que $c \leq b < d$ et $|c - d| < \alpha$. On a $|c - b| < \alpha$ et les inégalités

$$|f(c) - f(d)| \leq |f(c) - f(b)| + |f(b) - f(d)| < \varepsilon.$$

Pour tous $x, y \in [a, +\infty[$, on en déduit que l'on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \alpha$, d'où notre assertion.

3. Image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue

Elle est décrite par l'énoncé fondamental suivant :

Théorème 5.2. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$.

1) f est bornée.

2) Soient m la borne inférieure de $f([a, b])$ et M la borne supérieure de $f([a, b])$. On a

$$(6) \quad f([a, b]) = [m, M].$$

Démonstration : 1) C'est une conséquence directe du théorème de Heine et de la proposition 5.2.

2) Vérifions que f atteint ses bornes i.e. que m et M sont dans l'image de f . Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $M - \varepsilon$ ne majore pas $f([a, b])$, il existe $x \in [a, b]$ tel que l'on ait $M - \varepsilon < f(x)$. En particulier, pour tout entier naturel n , il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M.$$

De l'inégalité

$$|M - f(x_n)| < \frac{1}{n+1},$$

on déduit que la suite $(f(x_n))$ est convergente de limite M . Par ailleurs, la suite (x_n) étant bornée, il existe une application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\rho(n)})$ soit convergente de limite ℓ . Puisque $a \leq x_n \leq b$, on a $a \leq \ell \leq b$, et f étant continue en ℓ , la suite $(f(x_{\rho(n)}))$ converge vers $f(\ell)$. Cette suite étant extraite de $(f(x_n))$, on a donc $f(\ell) = M$, ce qui prouve que M est dans l'image de f . Par ailleurs, la fonction $-f$ est bornée sur $[a, b]$ car tel est le cas de f , et la borne supérieure de son image est $-m$. D'après ce qui précède, $-f$ étant continue sur $[a, b]$, il existe donc $x \in [a, b]$ tel que l'on ait $(-f)(x) = -m$, d'où $f(x) = m$ et notre assertion.

Afin de prouver (6), on remarque d'abord que $f([a, b])$ est contenu dans $[m, M]$. Inversement, on vient de voir qu'il existe x et y dans $[a, b]$ tels que $f(x) = m$ et $f(y) = M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel compris entre $f(x)$ et $f(y)$ est dans l'image de f , donc $[m, M]$ est contenu dans $f([a, b])$, d'où la relation (6).

Remarque 5.1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Compte tenu du théorème 5.2, l'image d'un intervalle fermé borné par une telle fonction est un intervalle fermé borné. Cela étant, il est faux en général que l'image d'un intervalle ouvert par une application continue soit un intervalle ouvert, comme on le constate en considérant l'image de $] -1, 1[$ par la fonction qui à x associe la valeur absolue de x , qui est l'intervalle $[0, 1[$.

4. Fonctions monotones

Avant d'aller plus loin dans l'étude des fonctions continues, on va prouver ici un énoncé sur les fonctions monotones. Soient X une partie de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur X . Soit x_0 un nombre réel. Rappelons que si x_0 est adhérent à $X^+ = X \cap]x_0, +\infty[$, on dit que f possède une limite à droite en x_0 si $f(x)$ a une limite quand x tend vers x_0 dans X^+ . De même, si x_0 est adhérent à $X^- = X \cap]-\infty, x_0[$, on dit que f a une limite à gauche en x_0 si $f(x)$ a une limite quand x tend vers x_0 dans X^- . Dans le cas, où elles existent, on notera $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ les limites de f respectivement à droite et à gauche au point x_0 .

Théorème 5.3. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Posons $X =]a, b[$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et croissante sur X .

1) Supposons f majorée. Alors f possède une limite à gauche en b , qui est la borne supérieure de $f(X)$.

2) Supposons f minorée. Alors f possède une limite à droite en a , qui est la borne inférieure de $f(X)$.

3) Pour tout $x \in X$, f possède une limite à gauche et à droite en x . De plus, on a

$$(7) \quad f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

Démonstration : 1) Notons M la borne supérieure de $f(X)$. Soit ε un nombre réel > 0 . Il existe $x_0 \in X$ tel que l'on ait

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leq M.$$

Posons $\alpha = b - x_0$. On a $\alpha > 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in X$, on a l'implication

$$|x - b| < \alpha \implies x_0 < x.$$

En effet, parce que x est dans X , on a $|x - b| = b - x = \alpha + x_0 - x$, d'où l'implication. Puisque f est croissante, on obtient ainsi pour tout $x \in X$ les inégalités

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M.$$

En particulier, on a

$$x \in X \text{ et } |x - b| < \alpha \implies |f(x) - M| < \varepsilon,$$

donc M est la limite de $f(x)$ quand x tend vers b dans X i.e. on a $f(b^-) = M$.

2) L'argument est le même. Notons m la borne inférieure de $f(X)$. Soit ε un nombre réel > 0 . Il existe $x_0 \in X$ tel que

$$m \leq f(x_0) < m + \varepsilon.$$

Posons $\alpha = x_0 - a > 0$. Pour tout $x \in X$, on a l'implication

$$|x - a| < \alpha \implies x < x_0,$$

vu que, x étant dans X , on a $|x - a| = x + \alpha - x_0$. On a donc

$$m \leq f(x) \leq f(x_0) < m + \varepsilon,$$

et l'implication

$$x \in X \text{ et } |x - a| < \alpha \implies |f(x) - m| < \varepsilon,$$

d'où $f(a^+) = m$.

3) Soit x un point de X . Puisque f est croissante, l'ensemble $f(]a, x[)$ est majoré par $f(x)$. En utilisant la première assertion avec la restriction de f à $]a, x[$, on en déduit que f a une limite à gauche en x . Par ailleurs, cette limite étant le plus petit des majorants de $f(]a, x[)$, on a $f(x^-) \leq f(x)$. De même, $f(]x, b[)$ étant minoré par $f(x)$, il en résulte que f a une limite à droite en x et que l'on a $f(x) \leq f(x^+)$, d'où les inégalités (7).

Corollaire 5.1. *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Posons $X =]a, b[$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et décroissante sur X .*

1) *Supposons f minorée. Alors f possède une limite à gauche en b , qui est la borne inférieure de $f(X)$.*

2) *Supposons f majorée. Alors f possède une limite à droite en a , qui est la borne supérieure de $f(X)$.*

3) *Pour tout $x \in X$, f possède une limite à gauche et à droite en x . De plus, on a*

$$(8) \quad f(x^+) \leq f(x) \leq f(x^-).$$

Démonstration : Soit m la borne inférieure de $f(X)$. La fonction $-f$ est croissante. L'ensemble $(-f)(X)$ est majoré et $-m$ est sa borne supérieure. Par suite, $-f$ possède une limite à gauche en b et l'on a $(-f)(b^-) = -m$ (th. 5.3), ce qui entraîne, par définition de la limite, que $f(b^-) = m$. L'argument concernant la seconde assertion est le même. Comme ci-dessus en considérant les restrictions de f à $]a, x[$ et $]x, b[$, on constate que f a des limites à gauche et à droite en x . Puisque $f(]x, b[)$ est majoré par $f(x)$, on a $f(x^+) \leq f(x)$, et $f(]a, x[)$ étant minoré par $f(x)$, on a $f(x) \leq f(x^-)$.

5. Monotonie et continuité

Théorème 5.4. *Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone dans I . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *f est continue sur I .*

2) *$f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration : Si f est continue sur I , on sait déjà que $f(I)$ est un intervalle (que f soit monotone ou pas).

Inversement, supposons que $f(I)$ soit un intervalle. Soit x un point de I . Il s'agit de montrer que f est continue en x . Pour cela on peut supposer que I est infini. Par ailleurs, quitte à changer f en $-f$, on peut de plus supposer que f est croissante dans I . Distinguons deux cas selon que x soit ou non une extrémité de I .

Supposons que x ne soit pas une extrémité de I . Soit z un élément de $] - \infty, x[\cap I$. Alors $]z, x[$ est contenu dans I , car I est un intervalle, et $f(]z, x[)$ est majoré par $f(x)$ car f est croissante. Par suite, f possède une limite à gauche en x , qui est la borne supérieure de $f(]z, x[)$ (th. 5.3). On a en particulier $f(z) \leq f(\frac{x+z}{2}) \leq f(x^-)$, d'où l'inclusion

$$(9) \quad f(] - \infty, x[\cap I) \subseteq] - \infty, f(x^-)].$$

De même, si z est un élément de $]x, +\infty[\cap I$, l'intervalle $]x, z[$ est contenu dans I et $f(]x, z[)$ est minoré par $f(x)$. Ainsi, f possède une limite à droite en x , qui est la borne inférieure de $f(]x, z[)$. On a donc $f(x^+) \leq f(\frac{z+x}{2}) \leq f(z)$, d'où

$$(10) \quad f(]x, +\infty[\cap I) \subseteq [f(x^+), +\infty[.$$

Par ailleurs, on a

$$f(I) = f(]-\infty, x[\cap I) \cup \{f(x)\} \cup f(]x, +\infty[\cap I).$$

D'après (9) et (10), on a donc l'inclusion

$$(11) \quad f(I) \subseteq]-\infty, f(x^-)] \cup \{f(x)\} \cup [f(x^+), +\infty[.$$

Puisque x n'est pas une extrémité de I , les ensembles $]-\infty, x[\cap I$ et $]x, +\infty[\cap I$ sont non vides. Il existe donc α et β dans $f(I)$ tels que l'on ait $\alpha \leq f(x^-)$ et $f(x^+) \leq \beta$ (inclusions (9) et (10)). Parce que $f(I)$ est intervalle, $[\alpha, \beta]$ est contenu dans $f(I)$. Les inégalités $f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$ et la condition (11) entraînent alors $f(x^-) = f(x) = f(x^+)$, et le fait que f soit continue en x .

Supposons que x soit une extrémité de I . Alors, ou bien x est la borne inférieure de I , ou bien x est la borne supérieure de I . Si x est la borne inférieure de I , on a

$$(12) \quad f(I) = \{f(x)\} \cup f(I \cap]x, +\infty[).$$

Soit z un élément $I \cap]x, +\infty[$. L'ensemble $f(]x, z[)$ est minoré par $f(x)$, ainsi f possède une limite à droite en x qui est le plus grand des minorants de $f(]x, z[)$. On a donc les inégalités $f(x) \leq f(x^+) \leq f(z)$. Puisque $f(I)$ est un intervalle, $[f(x), f(z)]$ est contenu dans $f(I)$. On déduit alors de (12) que $f(x) = f(x^+)$, donc que f est continue en x . La démonstration dans le cas où x est la borne supérieure de I est la même, d'où le résultat.

Définition 5.2. Soient X et Y deux parties de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow Y$ une fonction définie sur X à valeurs dans Y . On dit que f est un homéomorphisme de X sur Y si f est une bijection continue de X sur Y et si son application réciproque est continue sur Y .

Exemples 5.4.

- 1) La fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ est un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.
- 2) La fonction qui à x associe $\frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$, et son application réciproque est celle qui à y associe $\frac{y}{1-|y|}$.

Remarque 5.2. Il existe des bijections continues entre deux parties de \mathbb{R} qui ne sont pas des homéomorphismes. Tel est le cas de toute bijection de \mathbb{Z} sur \mathbb{Q} (qui sont dénombrables). En effet, considérons une bijection f de \mathbb{Z} sur \mathbb{Q} . Soit ε un nombre réel

strictement positif. Soit a un entier relatif. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - a| < 1$ on a $x = a$, d'où $|f(a) - f(x)| = 0 < \varepsilon$, ce qui prouve que f est continue en a . Par ailleurs, soit x_0 un nombre rationnel. Pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que l'on ait $x_0 < x < x_0 + \alpha$ car \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . Les éléments $f^{-1}(x_0)$ et $f^{-1}(x)$ sont des entiers relatifs distincts. On a donc $|x - x_0| < \alpha$ et $|f^{-1}(x_0) - f^{-1}(x)| \geq 1$, par suite f^{-1} n'est pas continue au point x_0 . Ainsi f est continue sur \mathbb{Z} et f^{-1} est discontinue en tout nombre rationnel, d'où en particulier l'assertion.

Corollaire 5.2 (Théorème des fonctions réciproques). *Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone dans I . Alors, $f(I)$ est un intervalle, et f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$. De plus, l'application réciproque de f est strictement monotone dans $f(I)$ et a la même monotonie que f .*

Démonstration : Posons $J = f(I)$. Puisque f est strictement monotone, f est injective, donc est une bijection de I sur J . La fonction f étant continue, J est un intervalle. Par ailleurs, la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ de f est strictement monotone. En effet, supposons par exemple f strictement croissante sur I . Soient u et v deux éléments de J tels que $u < v$. Il existe x et y dans I tels que $f(x) = u$ et $f(y) = v$. D'après l'hypothèse faite, on a $x < y$ i.e. $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, d'où notre assertion. Puisque $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle, on déduit du théorème 5.4 que f^{-1} est continue sur J , d'où le résultat.

Exemple 5.5. Prouvons que tout intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$, est homéomorphe à \mathbb{R} . Posons $I =]a, b[$ et considérons la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}.$$

C'est une fonction continue et strictement croissante dans I . Ainsi $f(I)$ est un intervalle et f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$ (cor. 5.2). Par ailleurs, $f(I)$ n'est pas majoré ni minoré, car on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ >}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ <}} f(x) = +\infty.$$

Il en résulte que l'on a $f(I) = \mathbb{R}$, d'où notre assertion.

6. La fonction racine n -ième

Soit n un entier naturel non nul. Ce qui précède permet de retrouver pour tout $x \geq 0$ l'existence et l'unicité de la racine n -ième positive de x . En effet :

Proposition 5.3. *La fonction puissance $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^n est un homéomorphisme strictement croissant sur son image $[0, +\infty[$.*

Démonstration : Notons f cette fonction. On sait qu'elle est continue, strictement croissante, que l'on a $f(0) = 0$ et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par suite, son image, qui est un intervalle, ne peut être que $[0, +\infty[$, d'où l'assertion (cor. 5.2).

La fonction réciproque de la fonction qui x associe x^n est la fonction racine n -ième $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ qui à x associe $\sqrt[n]{x}$, que l'on a définie dans le premier chapitre tout au moins pour $x > 0$. C'est un homéomorphisme strictement croissant de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

7. La fonction logarithme népérien

Le théorème des fonctions réciproques et les résultats démontrés sur la fonction exponentielle permettent de définir la fonction logarithme, et d'en établir ses principales propriétés.

Proposition 5.4. *La fonction exponentielle est un homéomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} sur son image $]0, +\infty[$.*

Démonstration : Notons ici $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction exponentielle. Elle est continue sur \mathbb{R} (prop. 5.1), donc $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle. On a vu que l'on a

$$\exp(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Ainsi $\exp(\mathbb{R})$ n'est pas borné supérieurement. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{2^n}.$$

(On peut le prouver par récurrence sur n en tenant compte du fait que $\exp(1) = e > 2$). La suite $(\frac{1}{2^n})$ étant convergente vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\exp(-n) < \varepsilon$, de sorte que la fonction \exp prend des valeurs arbitrairement proches de 0 (on peut aussi utiliser le lemme 5.1). Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$, on obtient l'égalité

$$\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[.$$

Par ailleurs, pour tout $x > 0$, on a $\exp(x) \geq 1 + x > 1$. Si x et y sont des nombres réels tels que $x > y$, on a $x - y > 0$, d'où $\exp(x - y) > 1$, puis $\exp(x) > \exp(y)$. La fonction \exp est donc strictement croissante. Le corollaire 5.2 entraîne alors le résultat.

Définition 5.3. *La fonction réciproque de la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est la fonction logarithme népérien. On la notera $\text{Log} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.*

C'est un homéomorphisme strictement croissant $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} (cor. 5.2). De plus, on a les formules

$$(13) \quad \exp(\text{Log } x) = x \quad \text{et} \quad \text{Log}(\exp y) = y \quad \text{quels que soient } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on a $\text{Log } 1 = 0$.

Lemme 5.3. Soient x et y des nombres réels strictement positifs et n un entier relatif. On a les égalités

$$\text{Log}(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y, \quad \text{Log } \frac{1}{x} = -\text{Log } x \quad \text{et} \quad \text{Log}(x^n) = n \text{Log } x.$$

Démonstration : Pour la première et la troisième égalité, la fonction exponentielle étant injective, il suffit de vérifier que l'on a

$$\exp(\text{Log}(xy)) = \exp(\text{Log } x + \text{Log } y) \quad \text{et} \quad \exp(\text{Log}(x^n)) = \exp(n \text{Log } x),$$

ce qui résulte de (13) et de la formule d'addition de la fonction exponentielle. Le fait que $\text{Log } 1 = 0$ entraîne alors la seconde égalité.

Lemme 5.4. On a les égalités

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{Log } x = -\infty.$$

Démonstration : Soit A un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\text{Log } 2^n = n \text{Log } 2$ et $\text{Log } 2 > \text{Log } 1 = 0$, de sorte qu'il existe un entier N tel que l'on ait $\text{Log } 2^N > A$. On a donc $\text{Log } x > A$ pour tout $x > 2^N$, d'où la première égalité. Il en résulte l'existence d'un réel $B > 0$ tel que l'on ait $\text{Log } y > A$ dès que $y > B$. Par ailleurs, il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{x} > B$ pour tout x tel que $0 < x < \alpha$. Pour un tel nombre réel x , on a donc $\text{Log } \frac{1}{x} > A$, d'où l'on déduit que la fonction qui x associe $\text{Log } \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs positives, d'où le résultat (lemme 5.3).

8. La fonction exponentielle de base a

Définition 5.4. Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle exponentielle de base a la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ définie par

$$\exp_a(x) = e^{x \text{Log } a} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note souvent

$$\exp_a(x) = a^x.$$

Pour que cette notation soit légitime, il convient de vérifier qu'elle coïncide avec la définition déjà donnée si $a = e$ et dans le cas où x est un nombre rationnel. Tout d'abord, on a $\text{Log}(\exp(1)) = 1$ i.e. $\text{Log } e = 1$, d'où $a^x = \exp(x)$ si $a = e$. Par ailleurs, posons $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. On a

$$(a^x)^q = (e^{x \text{Log } a})^q = e^{qx \text{Log } a} = e^{p \text{Log } a} = e^{\text{Log}(a^p)} = a^p,$$

de sorte que a^x est la racine q -ième positive de a^p , ce qui est conforme à la définition 1.7.

Lemme 5.5. *Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Pour tous x et y dans \mathbb{R} , on a les relations*

$$\operatorname{Log}(a^x) = x \operatorname{Log} a, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Démonstration : On a (lemme 5.3)

$$\operatorname{Log}(a^x) = \operatorname{Log}(e^{x \operatorname{Log} a}),$$

d'où la première égalité (cf. (13)). Par ailleurs, on a

$$\operatorname{Log}(a^x a^y) = \operatorname{Log}(a^x) + \operatorname{Log}(a^y) = x \operatorname{Log} a + y \operatorname{Log} a = (x + y) \operatorname{Log} a = \operatorname{Log}(a^{x+y}),$$

$$\operatorname{Log}((a^x)^y) = y \operatorname{Log}(a^x) = (xy) \operatorname{Log} a = \operatorname{Log}(a^{xy}),$$

$$\operatorname{Log}(ab)^x = x \operatorname{Log}(ab) = x \operatorname{Log} a + x \operatorname{Log} b = \operatorname{Log}(a^x) + \operatorname{Log}(b^x) = \operatorname{Log}(a^x b^x),$$

d'où les trois égalités suivantes (*loc. cit.*). On a ainsi $a^x a^{-x} = a^0 = 1$ et le fait que $1^x = 1$ entraîne la dernière égalité.

Comme on l'a déjà démontré si $a = e$ (lemme 5.1), on a les égalités

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

9. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

1. La fonction arc sinus

Proposition 5.5. *La fonction sinus est un homéomorphisme strictement croissant de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.*

Démonstration : On a vu que la fonction sinus est continue sur \mathbb{R} , tel est en particulier le cas sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Son image est contenue dans $[-1, 1]$, et l'on a $\sin \frac{-\pi}{2} = -1$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. D'après le théorème 5.2, on a donc

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1].$$

Par ailleurs, on a démontré que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} , et que sa fonction dérivée est la fonction cosinus. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos x > 0$. La fonction sinus est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le résultat (cor. 5.2).

Définition 5.5. La fonction réciproque de la fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ est la fonction arc sinus. On la notera $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction Arcsin est donc un homéomorphisme strictement croissant de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est impaire et on a les formules

$$(14) \quad \sin(\text{Arcsin } x) = x \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],$$

$$(15) \quad \text{Arcsin}(\sin x) = x \quad \text{pour tout } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$(16) \quad \cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],$$

$$(17) \quad \text{tg}(\text{Arcsin } x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

Les relations (14) et (15) résultent de la définition. Par ailleurs, soit x dans $[-1, 1]$. Posons $y = \text{Arcsin } x$. On a $\sin y = x$ et $\cos^2 y = 1 - x^2$. Puisque y appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos y \geq 0$, d'où la formule (16). De plus, si $x \in]-1, 1[$ on a $\text{Arcsin } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et les relations (14) et (16) entraînent alors (17).

2. La fonction arc cosinus

Proposition 5.6. La fonction cosinus est un homéomorphisme strictement décroissant de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Démonstration : La fonction cosinus est continue sur \mathbb{R} , donc aussi sur $[0, \pi]$. Son image est contenue dans $[-1, 1]$, et l'on a $\cos \pi = -1$ et $\cos 0 = 1$. On a donc l'égalité $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ (th. 5.2). La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} , et sa fonction dérivée est l'opposé de la fonction sinus. Pour tout $x \in]0, \pi[$ on a $\sin x > 0$, donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, d'où le résultat.

Définition 5.6. La fonction réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est la fonction arc cosinus. On la notera $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

La fonction Arccos est donc un homéomorphisme strictement décroissant de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Comme ci-dessus, on a les formules

$$(18) \quad \cos(\text{Arccos } x) = x \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],$$

$$(19) \quad \text{Arccos}(\cos x) = x \quad \text{pour tout } x \in [0, \pi],$$

$$(20) \quad \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],$$

$$(21) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1] - \{0\}.$$

Vérifions la formule (20). Étant donné x dans $[-1, 1]$, posons $y = \operatorname{Arccos} x$. On a $\cos y = x$ et $\sin^2 y = 1 - x^2$. Puisque y appartient à $[0, \pi]$ on a $\sin y \geq 0$, d'où (20).

Lemme 5.6. *Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a l'égalité*

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration : Soit un x un élément de $[-1, 1]$. Posons $y = \operatorname{Arccos} x \in [0, \pi]$. On a $x = \cos y$ d'où $x = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$ (comme on le constate en écrivant que $e^{i(\frac{\pi}{2}-y)} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iy}$ et en séparant les parties réelles et imaginaires). Par ailleurs, on a $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$ et d'après la formule (15) on a donc $\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{Arcsin} x$, d'où le lemme.

3. La fonction arc tangente

Proposition 5.7. *La fonction tangente est un homéomorphisme strictement croissant de $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur \mathbb{R} .*

Démonstration : La fonction tangente est continue sur son domaine de définition i.e. sur $\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, tel est donc le cas sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, et l'image de cet intervalle est donc un intervalle. Puisque l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) = +\infty,$$

cette image est donc \mathbb{R} tout entier. De plus, on a démontré que la fonction tangente est dérivable sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et que sa fonction dérivée y est strictement positive. Elle est donc strictement croissante, d'où l'assertion.

Définition 5.7. *La fonction réciproque de la fonction $\operatorname{tg} :] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction arc tangente. On la notera $\operatorname{Arctg} : \mathbb{R} \rightarrow] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.*

La fonction Arctg est donc un homéomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} sur l'intervalle $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Elle est impaire. On a $\operatorname{Arctg} 0 = 0$, donc pour tout $x > 0$ on a $\operatorname{Arctg} x > 0$. On a les formules

$$(22) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

$$(23) \quad \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{pour tout } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$(24) \quad \sin(\operatorname{Arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Démontrons (24). Soit x un nombre réel. Posons $y = \operatorname{Arctg} x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. On a les égalités $x = \operatorname{tg} y$ et $\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. La fonction cosinus étant positive sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, les réels x et $\sin y$ sont de même signe. Cela entraîne la première égalité de (24). En écrivant que l'on a $\cos^2(\operatorname{Arctg} x) + \sin^2(\operatorname{Arctg} x) = 1$, on obtient $\cos^2(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$, d'où la seconde égalité.

Lemme 5.7. *Pour tout nombre réel non nul x on a l'égalité*

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2},$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

Démonstration : Puisque la fonction arc tangente est impaire, il suffit de prouver cette formule pour les nombres réels positifs. Soit x un réel > 0 . Posons $y = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$. On a $0 < y < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tg} y = \frac{1}{x}$, puis les égalités

$$x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right).$$

On a $0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$, et la formule (23) entraîne le résultat.

Corollaire 5.3. *On a les égalités*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Démonstration : Tout revient comme ci-dessus à prouver la première égalité. Soit ε un nombre réel > 0 . Puisque la fonction arc tangente est continue en 0 et que $\operatorname{Arctg} 0 = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|\operatorname{Arctg} u| < \varepsilon$ dès que $|u| < \alpha$. Par ailleurs, il existe $A > 0$ tel que l'on ait $0 < \frac{1}{x} < \alpha$ pour tout $x > A$. Pour tout $x > A$ on a donc $|\operatorname{Arctg} \frac{1}{x}| < \varepsilon$, ce qui prouve que la fonction qui à x associe $\operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Le lemme 5.7 implique alors le résultat.