

Chapitre I - Préliminaires d'analyse

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et résultats d'analyse, concernant le corps des nombres réels, les limites de fonctions complexes d'une variable réelle, ainsi que les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction. Les études des fonctions continues et des fonctions dérivables seront développées dans les chapitres V et VI. Comme conséquence de la propriété de la borne supérieure, on démontrera dans ce premier chapitre le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues, que l'on sera amené à utiliser à plusieurs reprises dans le chapitre IV sur les nombres complexes.

Table des matières

1. Ensembles ordonnés	1
2. Corps ordonnés	4
3. Le corps des nombres réels	5
4. La fonction puissance à exposants rationnels	9
5. Intervalles de \mathbb{R}	11
6. Ensembles adjacents	12
7. Limites de fonctions	14
8. Fonctions continues	19
9. Fonctions dérivables	23

1. Ensembles ordonnés

Définition 1.1. Soit E un ensemble. Une relation d'ordre sur E est une relation binaire \mathcal{R} sur E telle que pour tous x, y, z dans E , les conditions suivantes soient remplies :

- 1) on a $x\mathcal{R}x$ (réflexivité).
- 2) Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$ (antisymétrie).
- 3) Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$ (transitivité).

Par commodité, une relation d'ordre est souvent notée \leq . On appelle ensemble ordonné tout couple (E, \leq) , où E est un ensemble et \leq une relation d'ordre sur E . Étant donné un tel couple (E, \leq) et x, y des éléments de E , si l'on a $x \leq y$, on dit que x est plus petit que y , ou que x est inférieur à y . On dit aussi que y est plus grand que x , ou que y est

supérieur à x et l'on écrit parfois $y \geq x$. Si l'on a $x \leq y$ avec x distinct de y , on écrit souvent $x < y$ ou $y > x$ et ces inégalités sont dites strictes.

Définition 1.2. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On dit que (E, \leq) est totalement ordonné, ou que \leq est une relation d'ordre totale sur E , si deux éléments quelconques de E sont comparables, autrement dit, si pour tous x et y dans E on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemples 1.1.

1) Si (E, \leq) est un ensemble ordonné, pour toute partie F de E , le couple (F, \leq) où \leq est la relation d'ordre induite sur F , est un ensemble ordonné.

2) Soient \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{Z} celui des entiers relatifs. On dispose dans \mathbb{Z} de la relation d'ordre, dite naturelle, telle que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on ait $a \leq b$ s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + c$. C'est une relation d'ordre totale. Elle induit une relation d'ordre sur \mathbb{N} .

3) Soit \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels. Il est muni de la relation d'ordre définie pour tous $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dans \mathbb{Q} , où a, c sont dans \mathbb{Z} et b, d sont non nuls dans \mathbb{N} , par la condition

$$(1) \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc.$$

C'est une relation d'ordre totale, qui prolonge l'ordre naturel de \mathbb{Z} .

4) Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. Dans l'ensemble des parties de E , l'inclusion est une relation d'ordre non totale.

5) Dans \mathbb{N} , la relation de divisibilité pour laquelle a divise b s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $b = aq$, est une relation d'ordre qui n'est pas totale. Notons qu'elle ne définit pas une relation d'ordre sur \mathbb{Z} , car pour tout entier relatif a non nul, a divise $-a$ et $-a$ divise a , pour autant, a est distinct de $-a$.

6) Soient E un ensemble et (F, \leq) un ensemble ordonné. Dans l'ensemble des applications de E dans F , la relation encore notée \leq , pour laquelle $f \leq g$ si pour tout $x \in E$ on a $f(x) \leq g(x)$, est une relation d'ordre. Elle n'est pas totale si E et F ont chacun au moins deux éléments. On l'appelle l'ordre fonctionnel.

7) Soient (E_i, \leq) pour $i = 1, \dots, n$, des ensembles ordonnés, et $E = E_1 \times \dots \times E_n$ le produit cartésien des E_i . Cet ensemble est muni de deux relations d'ordre standard.

7.1) L'ordre produit, défini pour tous (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans E par la condition

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \iff x_i \leq y_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Il n'est pas total en général.

7.2) L'ordre lexicographique, pour lequel on a $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ ou bien, i étant le plus petit indice tel que $x_i \neq y_i$, on a $x_i < y_i$. C'est une relation d'ordre totale si les E_i sont totalement ordonnés.

Considérons désormais un ensemble ordonné (E, \leq) et F une partie de E .

Définition 1.3 (Plus petit élément - Plus grand élément).

- 1) On dit que F possède un plus petit élément s'il existe $a \in F$ tel que pour tout $x \in F$ on ait $a \leq x$.
- 2) On dit que F possède un plus grand élément s'il existe $a \in F$ tel que pour tout $x \in F$ on ait $x \leq a$.

Lemme 1.1. Si F possède un plus petit (resp. un plus grand) élément, celui-ci est unique.

Démonstration : Cela résulte de la propriété d'antisymétrie.

Si F possède un plus petit (resp. un plus grand) élément, on dit alors que c'est le plus petit (resp. le plus grand) élément de F .

Exemples 1.2.

1) Dans l'ensemble des parties de E muni de la relation d'inclusion, l'ensemble vide est le plus petit élément, et E est le plus grand élément.

2) Dans \mathbb{N} muni de son ordre naturel, 0 est le plus petit élément, et il n'y a pas de plus grand élément. Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.

Définition 1.4 (Majorants - Minorants).

- 1) On dit que F est majorée s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in F$ on ait $x \leq m$. Un tel élément s'appelle un majorant de F .
- 2) On dit que F est minorée s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in F$ on ait $m \leq x$. Un tel élément s'appelle un minorant de F .
- 3) On dit que F est bornée si F est minorée et majorée.

Remarque 1.1. Si F admet un majorant (resp. un minorant) m qui est dans F , alors m est le plus grand (resp. le plus petit) élément de F .

Définition 1.5 (Borne supérieure - Borne inférieure).

- 1) Si l'ensemble des majorants de F admet un plus petit élément, cet élément s'appelle la borne supérieure de F .
- 2) Si l'ensemble des minorants de F admet un plus grand élément, cet élément s'appelle la borne inférieure de F .

La borne supérieure de F , si elle existe, est donc le plus petit des majorants de F . De même, la borne inférieure de F , si elle existe, est le plus grand des minorants de F . On utilisera à nombreuses reprises les lemmes suivants :

Lemme 1.2. Soit m un élément de E . Alors m est la borne supérieure de F si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) pour tout $x \in F$, on a $x \leq m$.
- 2) Pour tout $y \in E$ tel que $y < m$, il existe $x \in F$ tel que y ne soit pas supérieur ou égal à x .

Démonstration : Si m est la borne supérieure de F , alors m majore F , d'où la première condition. Par ailleurs, si $y \in E$ vérifie l'inégalité $y < m$, alors y ne majore pas F , d'où la seconde condition. Inversement, m est un majorant de F (condition 1) et c'est le plus petit (condition 2), d'où le lemme.

Si E est totalement ordonné, la seconde condition signifie qu'il existe $x \in F$ tel que l'on ait $y < x$.

Lemme 1.3. Soit m un élément de E . Alors m est la borne inférieure de F si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) pour tout $x \in F$, on a $m \leq x$.
- 2) Pour tout $y \in E$ tel que $m < y$, il existe $x \in F$ tel que y ne soit pas inférieur ou égal à x .

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.2.

2. Corps ordonnés

Définition 1.6. Soit $(K, +, \cdot)$ un corps commutatif d'élément neutre additif 0. On dit que K est un corps ordonné si K est muni d'une relation d'ordre totale \leq , telle que pour tous x, y, z dans K , on ait les implications :

$$(2) \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

$$(3) \quad 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \implies 0 \leq xy.$$

On dit aussi que le couple (K, \leq) est un corps ordonné.

Exemple 1.3. Le corps \mathbb{Q} muni de la relation d'ordre définie par la condition (1) est un corps ordonné. On peut démontrer que c'est la seule structure d'ordre qui en fasse un corps ordonné.

Considérons un corps ordonné (K, \leq) d'élément neutre additif 0 et d'élément neutre multiplicatif 1. Par définition d'un corps, on a $1 \neq 0$. Étant donné $x \in K$, on dit que x est positif si $x \geq 0$, et que x est négatif si $x \leq 0$. Puisque \leq est une relation d'ordre totale tout élément de K est positif ou négatif.

Lemme 1.4. Soient x, y, z des éléments de K .

- 1) Si x n'est pas nul, x et $-x$ sont de signe contraire i.e. si l'un positif l'autre est négatif.
- 2) Si $x > 0$ et $y < z$, on a $xy < xz$.
- 3) Si $x < 0$ et $y < z$, on a $xy > xz$.
- 4) Si x est non nul, on a $x^2 > 0$. En particulier, on a $1 > 0$.
- 5) Si $0 < x < y$, on a les inégalités $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Démonstration : 1) Supposons $x > 0$. D'après (2), on a $-x + x > -x$ d'où $-x < 0$ et $-x$ est négatif. Si $x < 0$, on a de même $-x + x < -x$, d'où $-x > 0$ et $-x$ est positif.

2) On a $0 = y - y < z - y$. D'après (3), on a donc $x(z - y) > 0$ i.e. $xz - xy > 0$. En utilisant (2), on obtient $xz > xy$.

3) Si $x < 0$, on a $-x > 0$, d'où $(-x)y < (-x)z$ i.e. $-xy < -xz$, et d'après (2), on a donc $xz < xy$.

4) Si $x > 0$, on a d'après (3) l'inégalité $x^2 > 0$. Supposons $x < 0$. Dans ce cas, on a $-x > 0$, et d'après (3), on déduit que $(-x)^2 = x^2 > 0$. Puisque $1^2 = 1$, on a donc $1 > 0$.

5) On a $\frac{1}{y} > 0$: sinon $\frac{1}{y} < 0$ et vu que $0 < y$ on aurait $0 > y(\frac{1}{y}) = 1$, ce qui n'est pas. De même, on a $\frac{1}{x} > 0$, d'où $(\frac{1}{x})(\frac{1}{y}) > 0$. De l'inégalité $x < y$ on déduit alors que

$$\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)x < \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)y$$

d'où les inégalités annoncées.

3. Le corps des nombres réels

On ne se préoccupera pas ici de sa construction. Nous admettrons donc l'énoncé suivant.

Théorème 1.1. Il existe un corps satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) il est commutatif et contient \mathbb{Q} comme sous-corps.
 - 2) C'est un corps ordonné.
 - 3) Toute partie non vide majorée de ce corps possède une borne supérieure.
- De plus, il est unique à isomorphisme de corps ordonnés près.

L'assertion d'unicité signifie que si K et K' sont deux corps vérifiant les trois conditions de l'énoncé, il existe un isomorphisme de corps de K sur K' qui est compatible avec les relations d'ordre sur K et K' .

Choisissons désormais un tel corps ordonné (\mathbb{R}, \leq) , appelé corps des nombres réels. La relation d'ordre \leq , induite sur \mathbb{Q} , est la relation d'ordre usuelle i.e. celle définie par la condition (1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, rappelons que la valeur absolue de x , qui est notée $|x|$, est le plus grand des nombres x et $-x$.

Établissons dans ce qui suit quelques propriétés essentielles de \mathbb{R} .

Proposition 1.1 (Propriété d'Archimède). *Soient x et y des nombres réels avec $x > 0$. Il existe un entier naturel n tel que $y < nx$.*

Démonstration : On procède par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $nx \leq y$. L'ensemble

$$X = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est alors une partie non vide de \mathbb{R} majorée par y . Par suite, X possède une borne supérieure s . Puisque $x > 0$, on a $s - x < s$ et $s - x$ ne majore pas X , donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $s - x < n_0 x$, d'où $s < (n_0 + 1)x$, et une contradiction car $(n_0 + 1)x$ est dans X .

Proposition 1.2 (Partie entière). *Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier relatif $E(x)$ vérifiant les inégalités*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Le nombre $E(x)$ s'appelle la partie entière de x .

Démonstration : Considérons l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Puisque l'on a $1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x < n_0$ (prop. 1.1), donc A est majoré par n_0 . Il est non vide, car il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $-x < n_1$ i.e. $-n_1 < x$ (*loc. cit.*). Toute partie non vide majorée de \mathbb{Z} possède un plus grand élément. Ainsi A possède un plus grand élément $E(x)$, et il vérifie les inégalités annoncées. Par ailleurs, si $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $n \leq x < n + 1$, alors n est le plus grand élément de A , d'où l'assertion d'unicité (lemme 1.1).

Définition 1.7. *Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que A est dense dans \mathbb{R} si pour tous x et y dans \mathbb{R} avec $x < y$, il existe $z \in A$ tel que $x < z < y$.*

Proposition 1.3. *L'ensemble \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. On a $y - x > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ non nul tel que

$$1 < n(y - x).$$

Posons $q = E(nx)$. On a $q \leq nx < q + 1$, d'où les inégalités

$$nx < q + 1 \leq nx + 1 < ny.$$

En posant $r = \frac{q+1}{n}$, qui est dans \mathbb{Q} , on obtient $x < r < y$ et le résultat.

Corollaire 1.1. *Quels que soient x et y dans \mathbb{R} avec $x < y$, il existe une infinité de nombres rationnels r tels que $x < r < y$.*

Démonstration : Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. S'il n'y avait qu'un nombre fini de rationnels strictement compris entre x et y , en notant z le plus petit d'entre eux, il n'existerait aucun rationnels r tels que $x < r < z$.

Remarque 1.2. L'ensemble $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est aussi dense dans \mathbb{R} . On démontrera cette assertion dans le chapitre II.

Proposition 1.4. *Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} possède une borne inférieure.*

Démonstration : Soit A une partie non vide minorée de \mathbb{R} . Posons

$$A' = \left\{ -x \mid x \in A \right\}.$$

C'est une partie non vide majorée de \mathbb{R} , elle possède donc une borne supérieure m . Vérifions que $-m$ est la borne inférieure de A . Tout d'abord, $-m$ minore A . Par ailleurs, soit y dans \mathbb{R} tel que $y > -m$. Il s'agit de montrer que y ne minore pas A . On a $-y < m$, donc $-y$ ne majore pas A' , d'où l'existence de $x \in A'$ tel que $-y < x$. On obtient $-x < y$ et $-x$ est dans A , d'où l'assertion.

Comme conséquence de la propriété de la borne supérieure, vérifions l'énoncé suivant :

Proposition 1.5. *Soit n un entier naturel non nul. Tout nombre réel $a > 0$ possède une unique racine n -ième positive, autrement dit, il existe un unique nombre réel $x > 0$ tel que l'on ait $x^n = a$.*

Démonstration : Soit a un nombre réel strictement positif. Considérons l'ensemble

$$E = \left\{ t \in \mathbb{R}, t > 0 \mid t^n < a \right\}.$$

En posant $u = \frac{a}{1+a}$, on a $0 < u < 1$, d'où $u^n \leq u$. Puisque $1 + a > 1$, on a $u < a$ puis $u^n < a$, donc u appartient à E , ainsi E est non vide. Par ailleurs, pour tout nombre réel $t > 1 + a$, on a $t^n \geq t > a$, et t n'est pas dans E , ce qui montre que E est majoré par $1 + a$. Il possède donc une borne supérieure x . On a $x \geq u > 0$, en particulier x est non nul.

Démontrons que l'on a $x^n = a$. On utilise pour cela le fait que pour tous $y, z \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq y < z$, on a

$$(4) \quad z^n - y^n \leq n(z - y)z^{n-1},$$

ce qui résulte de l'égalité

$$z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + \dots + y^{n-1}).$$

Supposons $x^n < a$. Il existe alors un nombre réel h tel que

$$0 < h < 1 \quad \text{et} \quad h < \frac{a - x^n}{n(x+1)^{n-1}}.$$

D'après (4), on a les inégalités

$$(x+h)^n - x^n \leq nh(x+h)^{n-1} < nh(x+1)^{n-1} < a - x^n,$$

d'où $(x+h)^n < a$. Par suite, $x+h$ appartient à E , ce qui contredit le fait que x soit un majorant de E .

Supposons $x^n > a$. Posons (on a $x \neq 0$)

$$k = \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}.$$

On a $0 < k < x$. Pour tout $t > x - k$, on a les inégalités

$$x^n - t^n < x^n - (x-k)^n \leq nkx^{n-1} = x^n - a,$$

d'où $-t^n < -a$ puis $t^n > a$ et t n'est pas dans E . On en déduit que si $t \in E$ alors on a $t \leq x - k$, donc $x - k$ est un majorant de E . On obtient de nouveau une contradiction car on a $k > 0$ et x est le plus petit des majorants de E .

Il en résulte que $x^n = a$, d'où l'assertion d'existence. En ce qui concerne l'unicité, il suffit de remarquer que si x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $0 < x_1 < x_2$ alors $x_1^n < x_2^n$.

Notation. Étant donné un nombre réel $a > 0$ et un entier $n \geq 1$, on notera $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ la racine n -ième positive de a , et \sqrt{a} si $n = 2$.

Corollaire 1.2. Soient n un entier naturel non nul et a, b des nombres réels strictement positifs. On a l'égalité

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration : Posons $x = a^{\frac{1}{n}}$ et $y = b^{\frac{1}{n}}$. On a $ab = (xy)^n$. D'après l'assertion d'unicité de la proposition précédente, on en déduit que $xy = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

Remarque 1.3. La différence entre \mathbb{R} et \mathbb{Q} réside dans la condition 3 de l'énoncé du théorème 1.1. Il existe en effet des parties non vides majorées de \mathbb{Q} qui n'ont pas de bornes supérieures dans \mathbb{Q} . Vérifions qu'il en est ainsi de l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < \sqrt{2} \right\}.$$

Il est non vide et majoré par 2. Soit y un nombre réel positif tel que $y < \sqrt{2}$. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $y < r < \sqrt{2}$, et r appartient à A . Par suite, y ne

majoré pas A . Le fait que $\sqrt{2}$ soit un majorant de A entraîne alors que $\sqrt{2}$ est la borne supérieure de A dans \mathbb{R} . En particulier, tout majorant rationnel de A est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $\sqrt{2}$ n'est pas dans \mathbb{Q} , sinon il existerait des entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$, or l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de p^2 est pair et celui intervenant dans celle de $2q^2$ est impair.

Soit alors $x \in \mathbb{Q}$ un majorant de A . D'après ce qui précède, on a $x > \sqrt{2}$. En utilisant de nouveau la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} < r < x$, donc r majore A . Il existe ainsi un rationnel strictement plus petit que x qui majore A . L'ensemble des majorants de A dans \mathbb{Q} n'a donc pas de plus petit élément, d'où l'assertion (déf. 1.5).

Plus généralement, considérons une partie X de \mathbb{Q} non vide et majorée (dans \mathbb{R} ou \mathbb{Q} cela revient au même). Notons $\text{Sup } X$ sa borne supérieure dans \mathbb{R} . Alors, si $\text{Sup } X$ n'est pas rationnel, X n'a pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} . En effet, si $r \in \mathbb{Q}$ majore X , on a l'inégalité

$$\text{Sup } X < r.$$

Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que l'on ait

$$\text{Sup } X < r' < r,$$

donc l'ensemble des majorants de X dans \mathbb{Q} n'a pas de plus petit élément.

Signalons que pour tout entier naturel n qui n'est pas un carré, \sqrt{n} est irrationnel. Pour le vérifier, on peut supposer n sans facteurs carrés, et l'argument est alors analogue au cas où $n = 2$ en considérant un diviseur premier de n .

4. La fonction puissance à exposants rationnels

On se propose de définir ici l'expression x^r pour tout $x > 0$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, et de démontrer les formules attendues

$$(5) \quad x^r x^s = x^{r+s}, \quad (x^r)^s = x^{rs} \quad \text{et} \quad x^r y^r = (xy)^r \quad \text{quels que soient } r, s \in \mathbb{Q}.$$

On suppose connues ces formules dans le cas où les exposants r et s sont des entiers relatifs.

Partons d'un rationnel r . Posons $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Compte tenu de (5), on doit avoir

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p,$$

de sorte que la seule définition possible est la suivante :

Définition 1.7. Soient x un réel > 0 et r un rationnel. Posons $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Le nombre réel x^r est la racine q -ième positive de x^p .

Cela étant, pour que cette définition ait un sens, il convient de vérifier que la définition de x^r ne dépend pas du représentant choisi de r . Posons $r = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, il s'agit de vérifier que x^r est la racine b -ième positive de x^a , autrement dit, que l'on a

$$(6) \quad (x^a)^{\frac{1}{b}} = (x^b)^{\frac{1}{a}}.$$

Pour cela, on écrit que l'on a

$$\begin{aligned} x^{aq} &= \left(\left((x^a)^{\frac{1}{b}} \right)^b \right)^q = \left((x^a)^{\frac{1}{b}} \right)^{bq}, \\ x^{bp} &= \left(\left((x^b)^{\frac{1}{a}} \right)^a \right)^p = \left((x^b)^{\frac{1}{a}} \right)^{ap}. \end{aligned}$$

Puisque l'on a $bp = aq$, on obtient (6) d'après l'unicité de la racine n -ième positive d'un nombre réel positif. La définition est ainsi justifiée, ainsi que la notation déjà utilisée dans le cas où $p = 1$.

Il reste à prouver les formules (5). Il existe des entiers a, b et q , avec $q \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait, après réduction au même dénominateur,

$$r = \frac{a}{q} \quad \text{et} \quad s = \frac{b}{q}.$$

On a les égalités

$$\begin{aligned} (x^r x^s)^q &= \left((x^a)^{\frac{1}{q}} \right)^q \left((x^b)^{\frac{1}{q}} \right)^q = x^{a+b}, \\ (x^{r+s})^q &= \left((x^{a+b})^{\frac{1}{q}} \right)^q = x^{a+b}, \end{aligned}$$

d'où $(x^r x^s)^q = (x^{r+s})^q$ et l'égalité $x^r x^s = x^{r+s}$ en vertu de l'unicité des racines q -ièmes positives. Afin de prouver la seconde égalité de (5), on élève ses deux membres à la puissance q^2 . On a

$$(x^{rs})^{q^2} = \left((x^{ab})^{\frac{1}{q^2}} \right)^{q^2} = x^{ab},$$

et l'on vérifie que c'est aussi $\left((x^r)^s \right)^{q^2}$. En ce qui concerne la dernière égalité, on écrit que l'on a

$$(x^r y^r)^q = \left((x^a)^{\frac{1}{q}} (y^a)^{\frac{1}{q}} \right)^q = x^a y^a = (xy)^a = \left(((xy)^a)^{\frac{1}{q}} \right)^q = ((xy)^r)^q,$$

d'où le résultat.

Vu que $x^0 = 1$, et que $x^1 = x$, on déduit de (5) que l'on a

$$(7) \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad \text{et} \quad (x^{\frac{1}{r}})^r = (x^r)^{\frac{1}{r}} = x \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } r \in \mathbb{Q}.$$

Lemme 1.5. Soient r un nombre rationnel et x, y des nombres réels strictement positifs. On a les implications

$$x > y \implies x^r > y^r \quad \text{si } r > 0,$$

$$x > y \implies x^r < y^r \quad \text{si } r < 0.$$

Démonstration : On sait que tel est le cas si r est un entier relatif. Posons $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, on a $x > y > 0$. Il en résulte que

$$x^{\frac{1}{q}} > y^{\frac{1}{q}},$$

de sorte que l'on a

$$x^r = (x^{\frac{1}{q}})^p > (y^{\frac{1}{q}})^p = y^r \quad \text{si } p > 0 \quad \text{et} \quad (x^{\frac{1}{q}})^p < (y^{\frac{1}{q}})^p \quad \text{si } p < 0.$$

d'où le lemme.

Lemme 1.6. Soient r_1 et r_2 des nombres rationnels tels que $r_1 < r_2$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $n^{r_1} \leq n^{r_2}$.

Démonstration : Posons $r = r_1 - r_2$. Compte tenu des égalités

$$\frac{n^{r_1}}{n^{r_2}} = n^{r_1} n^{-r_2} = n^{r_1 - r_2} = n^r,$$

tout revient à vérifier que l'on a $n^r \leq 1$. On a $-r > 0$. Posons $-r = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers ≥ 1 . On a

$$n^{-r} = (n^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque l'on a $n^p \geq 1$, on en déduit que $(n^p)^{\frac{1}{q}} \geq 1$ d'où $n^r \leq 1$.

5. Intervalles de \mathbb{R}

Par définition, une partie I de \mathbb{R} est un intervalle si $I = \mathbb{R}$, ou bien s'il existe des nombres réels a et b avec $a \leq b$ tels que I soit l'une des parties suivantes :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}, \quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

On note parfois $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Si $a = b$, l'intervalle $[a, b]$ est le singleton $\{a\}$, et $]a, b]$, $[a, b[$, ainsi que $]a, b[$ est l'ensemble vide. Tout intervalle ayant au moins deux éléments est

infini. Les intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $] - \infty, a]$ sont dits fermés, et ceux de la forme $]a, b[$, avec a ou b éventuellement infinis, sont dit ouverts. L'ensemble vide et \mathbb{R} sont à la fois ouverts et fermés.

Voici une caractérisation importante des intervalles.

Théorème 1.2. *Soit I une partie de \mathbb{R} . Pour que I soit un intervalle, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : quels que soient x et y dans I et z dans \mathbb{R} , on a l'implication*

$$x < z < y \implies z \in I.$$

Démonstration : La nécessité de la condition résulte de la définition. Inversement, supposons I non vide. Si I est majoré (resp. minoré) on notera $\text{Sup } I$ (resp. $\text{Inf } I$) sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure). Distinguons plusieurs cas :

1) Supposons I non majoré ni minoré. Soit z un nombre réel. Puisque z ne minore pas I , il existe $x \in I$ tel que $x < z$. De même, z n'étant pas un majorant de I , il existe $y \in I$ tel que $z < y$. D'après l'hypothèse faite, z est donc dans I . Par suite, on a $I = \mathbb{R}$.

2) Supposons I majoré et non minoré. Soit z un nombre réel tel que $z < \text{Sup } I$. Puisque z ne majore pas I , il existe $y \in I$ tel que $z < y$, et z ne minorant pas I , il existe $x \in I$ tel que $x < z$. Il en résulte que z est dans I , ce qui prouve que l'intervalle $] - \infty, \text{Sup } I[$ est contenu dans I . Par ailleurs, I est contenu dans l'intervalle $] - \infty, \text{Sup } I]$. On en déduit que I est l'un des deux intervalles $] - \infty, \text{Sup } I]$ et $] - \infty, \text{Sup } I[$.

3) Le cas où I est minoré et non majoré se traite de la même façon que le précédent.

4) Supposons I minoré et majoré. Soit z un nombre réel tel que $\text{Inf } I < z < \text{Sup } I$. Puisque z ne majore pas I , il existe $x \in I$ tel que $z < x$, et z ne minorant pas I , il existe $y \in I$ tel que $y < z$. Ainsi z est dans I . L'intervalle $] \text{Inf } I, \text{Sup } I[$ est donc contenu dans I . Puisque I est contenu dans l'intervalle $[\text{Inf } I, \text{Sup } I]$, il en résulte que I est l'un des quatre intervalles d'extrémités $\text{inf } I$ et $\text{Sup } I$, d'où le théorème.

Corollaire 1.3. *Toute intersection d'intervalles est un intervalle.*

Démonstration : Soit I une intersection d'intervalles. Si l'on a $x < z < y$ avec x et y dans I et $z \in \mathbb{R}$, alors x et y appartiennent à chacun des intervalles donnés, donc z aussi i.e. z est dans I . La condition suffisante du théorème 1.2 entraîne alors l'assertion.

6. Ensembles adjacents

Soient A et B des parties non vides de \mathbb{R} .

Définition 1.8. *On dit que (A, B) est un couple d'ensembles adjacents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) A est majoré et B est minoré.

2) On a $\text{Sup } A = \text{Inf } B$, où $\text{Sup } A$ et $\text{Inf } B$ désignent respectivement la borne supérieure de A et la borne inférieure de B .

Proposition 1.6. *Le couple (A, B) est un couple d'ensembles adjacents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- 1) *quels que soient $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \leq b$.*
- 2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que l'on ait $b - a < \varepsilon$.*

Démonstration : Supposons que (A, B) soit un couple d'ensembles adjacents. Soit (a, b) un élément de $A \times B$. On a les inégalités

$$a \leq \sup A = \inf B \leq b,$$

d'où la première condition. Soit ε un nombre réel > 0 . L'élément $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A . Par suite, il existe $a \in A$ tel que l'on ait

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sup A.$$

De même, $\inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de B . Il existe donc $b \in B$ tel que l'on ait

$$\inf B \leq b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sup A = \inf B \leq b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $b - a < \varepsilon$ et la seconde condition.

Inversement, supposons les deux conditions de l'énoncé satisfaites. Dans ce cas, d'après la première condition, A est majoré par tout élément de B et B est minoré par tout élément de A . De plus, on a

$$\sup A \leq \inf B.$$

En effet, soit b un élément de B . Il majore A , de sorte que l'on a $\sup A \leq b$. Par suite, $\sup A$ est un minorant de B , d'où l'inégalité annoncée. Supposons que l'on ait

$$\sup A < \inf B.$$

Posons $\varepsilon = \inf B - \sup A$. On a $\varepsilon > 0$, et pour tout $(a, b) \in A \times B$ les inégalités

$$a \leq \sup A < \inf B \leq b$$

entraînent $b - a \geq \varepsilon$, ce qui contredit la seconde condition. On obtient $\sup A = \inf B$, et le fait que (A, B) soit un couple d'ensembles adjacents.

Proposition 1.7. *Si (A, B) est un couple d'ensembles adjacents, alors $\sup A = \inf B$ est l'unique nombre réel x tel que l'on ait*

$$a \leq x \leq b \quad \text{pour tout } (a, b) \in A \times B.$$

Démonstration : Le nombre réel $\text{Sup } A = \text{Inf } B$ satisfait cette condition. Soit x un nombre réel tel que cette condition soit réalisée. Alors, x majore A et minore B , d'où $\text{Sup } A \leq x \leq \text{Inf } B$, ce qui conduit à $x = \text{Sup } A = \text{Inf } B$, d'où l'unicité annoncée.

On dit souvent que A et B sont des ensembles adjacents si (A, B) ou (B, A) est un couple d'ensembles adjacents.

Exemples 1.4.

- 1) Soient x un nombre réel et $A = B = \{x\}$. Alors A et B sont adjacents.
- 2) Les intervalles $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$ sont adjacents. On a $\text{Sup } A = \text{Inf } B = 1$. Il en est de même si $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$.

7. Limites de fonctions

On rappelle ici la notion de valeur limite d'une fonction complexe de variable réelle. Soient X une partie de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur X à valeurs dans \mathbb{C} .

Rappelons que tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ où i est un élément de carré -1 . Étant donné $z \in \mathbb{C}$, si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, le module de z , noté $|z|$, est $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si x est un nombre réel, la valeur absolue de x est son module comme nombre complexe. Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , on a

$$|z| \geq 0, \quad |zz'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{et} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

De l'inégalité triangulaire, on déduit que l'on a

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

Ces brefs rappels sur les nombres complexes nous suffiront dans ce chapitre.

1) Limite de $f(x)$ quand x tend vers a

Définition 1.9. Soit a un nombre réel. On dit que f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ au point a , ou en a , ou bien que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a , si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication

$$(8) \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notons que l'on impose dans cette définition aucune condition sur a , notamment d'appartenir à X ou non. Cela étant, il convient de supposer que a , sans être a priori dans X , soit un point adhérent à X :

Définition 1.10. On dit que a est un point adhérent à X , si pour tout $r > 0$ l'intersection $]a - r, a + r[\cap X$ est non vide.

Si a n'est pas adhérent à X , il existe donc $r > 0$ tel que l'intervalle $]a - r, a + r[$ soit disjoint de X , et dans ce cas l'implication (8) est vérifiée pour tout $\alpha < r$ et tout $\ell \in \mathbb{C}$. Tout nombre complexe est alors limite de f au point a , ce que l'on exclut. On supposera donc dans toute la suite que la notion de limite en un point d'une fonction définie sur une partie de \mathbb{R} , ne concerne que les points adhérents à la partie considérée.

Lemme 1.7. *Supposons a adhérent à X . Si f tend vers une limite au point a , cette limite est unique.*

Démonstration : Supposons que f tende à la fois vers ℓ et ℓ' dans \mathbb{C} au point a . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $x \in X$ tel que l'on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$, vu que ces inégalités sont réalisées dès que x est assez proche de a , et que tout intervalle ouvert de centre a rencontre X . Par suite, on a $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$, d'où $\ell = \ell'$.

Si f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a , on écrit alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = \ell,$$

en omettant la précision « $x \in X$ » si le contexte ne prête pas à confusion. Cette condition signifie que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on souhaite, dès que x est suffisamment voisin de a .

Exemple 1.5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Vérifions que l'on a

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 2| < 1$, on a

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2|.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc l'implication

$$|x - 2| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right) \implies |x^2 - 4| < \varepsilon,$$

d'où l'égalité attendue.

2) Limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

Supposons X non majoré, autrement dit que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in X$ tel que l'on ait $x > M$. Cette condition signifie que X rencontre tout intervalle de la forme $[r, +\infty[$. C'est l'analogue de la condition d'adhérence dans le cas des limites en un point.

Définition 1.11. *On dit que f possède une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, ou bien que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication*

$$(9) \quad x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Lemme 1.8. *Si f possède une limite en $+\infty$, cette limite est unique.*

Démonstration : Supposons que f tende vers ℓ et ℓ' dans \mathbb{C} en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque X n'est pas majoré, il existe $x \in X$ assez grand tel que l'on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$, d'où $|\ell - \ell'| < 2\varepsilon$, puis $\ell = \ell'$.

Lorsque la condition (9) est réalisée, on note alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in X}} f(x) = \ell.$$

Elle signifie que pour tout $x \in X$ assez grand, $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on souhaite.

Exemple 1.6. Prenons $X = \mathbb{R}^*$ et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{ix}$ où $i^2 = -1$. La limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x)| < \varepsilon$ dès que $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

3) Limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$

Supposons X non minoré, autrement dit que X rencontre tout intervalle de la forme $] -\infty, r]$. La définition est analogue à la précédente.

Définition 1.12. *On dit que f possède une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $-\infty$, ou bien que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication*

$$(10) \quad x < A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme ci-dessus, on montre que si $f(x)$ a une limite quand x tend $-\infty$, celle-ci est unique. On note alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in X}} f(x) = \ell.$$

Exemple 1.7. Si $X = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est 0. En effet, si $\varepsilon > 0$, on a $|f(x)| < \varepsilon$ dès que $x < -\frac{1}{\varepsilon}$.

4) Cas où $f(X)$ est contenu dans \mathbb{R}

On suppose ici l'image de f contenue dans \mathbb{R} .

Définition 1.13. *Soit a un nombre réel adhérent à X .*

1) *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a , si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication*

$$(11) \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) > A.$$

2) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a , si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication

$$(12) \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) < A.$$

Définition 1.14. 1) Supposons X non majoré. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication

$$(13) \quad x > B \implies f(x) > A.$$

2) Supposons X non minoré. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication

$$(14) \quad x < B \implies f(x) > A.$$

On dispose d'une définition analogue pour exprimer le fait que $f(x)$ tende vers $-\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$. On adopte par ailleurs des notations semblables à celles déjà évoquées pour traduire ces limites. Par exemple, l'égalité

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in X}} f(x) = \ell,$$

signifie que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 1.8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré $n \geq 1$. Il existe des réels a_i , avec $a_n \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{si} \quad a_n > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{si} \quad a_n < 0.$$

5) Opérations algébriques sur les limites

Étant données des fonctions f et g définies sur X à valeurs dans \mathbb{C} , on définit les fonctions $f + g$, fg , $|f|$, et λf pour $\lambda \in \mathbb{C}$, qui sont définies sur X à valeurs dans \mathbb{C} , par les formules

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad |f|(x) = |f(x)| \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

De plus, si $g(x)$ est non nul pour tout $x \in X$, on dispose de la fonction $\frac{f}{g} : X \rightarrow \mathbb{C}$ définie par la relation

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Proposition 1.8. Soit a un point adhérent à X . Supposons que f et g possèdent des limites respectivement ℓ et ℓ' en a .

- 1) La fonction $f + g$ a pour limite $\ell + \ell'$ en a .
- 2) La fonction $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en a .
- 3) La fonction fg a pour limite $\ell\ell'$ en a .
- 4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction λf a pour limite $\lambda\ell$ en a .
- 5) Si $\ell \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$ assez proche de a , et $\frac{1}{f}$ a pour limite $\frac{1}{\ell}$ en a .

Démonstration : Soit ε un nombre réel strictement positif.

1) Pour tout $x \in X$, on a

$$|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - a| < \alpha$. De même, il existe $\beta > 0$ tel que l'on ait $|g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - a| < \beta$. Pour tout $x \in X$, on donc l'implication

$$|x - a| < \text{Min}(\alpha, \beta) \implies |(f + g)(x) - (\ell + \ell')| < \varepsilon,$$

d'où l'assertion.

2) Pour tout $x \in X$, on a

$$(15) \quad ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell|,$$

d'où pour x assez proche de a , l'inégalité $||f(x)| - |\ell|| < \varepsilon$.

3) Pour tout $x \in X$, on a

$$|(fg)(x) - \ell\ell'| \leq |f(x)g(x) - f(x)\ell'| + |f(x)\ell' - \ell\ell'| = |f(x)||g(x) - \ell'| + |\ell'||f(x) - \ell|.$$

Compte tenu de l'inégalité (15), il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|f(x)| < |\ell| + 1$ dès que $|x - a| < \alpha$. Posons

$$\beta = \text{Max}(|\ell| + 1, |\ell'|).$$

On a $\beta > 0$. Il existe $\gamma > 0$ tel que l'on ait $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ dès que $|x - a| < \gamma$. De même, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $|g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ dès que $|x - a| < \delta$. Pour tout $x \in X$ on obtient

$$|x - a| < \text{Min}(\alpha, \gamma, \delta) \implies |(fg)(x) - \ell\ell'| < \varepsilon,$$

d'où l'assertion.

4) On peut supposer $\lambda \neq 0$. Pour x assez proche de a , on a $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$, d'où $|(\lambda f)(x) - \lambda\ell| < \varepsilon$.

5) Il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$ pour tout $x \in X$ vérifiant $|x - a| < \alpha$, d'où alors en utilisant (15), les inégalités

$$|f(x)| > \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

Pour tout $x \in X$ tel que $|x - a| < \alpha$, on a donc

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)\ell|} < \frac{2|f(x) - \ell|}{|\ell|^2}.$$

Par ailleurs, il existe $\beta > 0$ tel que l'on ait

$$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2},$$

dès que $|x - a| < \beta$. Pour tout $x \in X$, on obtient

$$|x - a| < \min(\alpha, \beta) \implies \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| < \varepsilon,$$

et le résultat.

De même, on a l'énoncé suivant :

Proposition 1.9. *Supposons X non majoré et que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers ℓ et ℓ' quand x tend vers $+\infty$. Alors, quand x tend vers $+\infty$,*

- 1) $f(x) + g(x)$ tend vers $\ell + \ell'$,
- 2) $f(x)g(x)$ tend vers $\ell\ell'$,
- 3) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f(x)$ tend vers $\lambda\ell$,
- 4) $|f(x)|$ tend vers $|\ell|$,
- 5) si $\ell \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$ pour tout x assez grand, et $\frac{1}{f(x)}$ tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Sa démonstration est analogue à celle de la proposition 1.8. Elle est en fait identique à celle du même énoncé en « version suites numériques » qui sera détaillée dans le chapitre II. Par ailleurs, il conviendrait d'écrire des énoncés relatifs à toutes les situations de limites rencontrées précédemment, dont les démonstrations sont toutes similaires. On se bornera à ceux exposés ci-dessus.

8. Fonctions continues

Soient X une partie de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur X à valeurs dans \mathbb{C} . On se préoccupe ici de l'existence éventuelle de la limite de $f(x)$ quand x tend vers un point de X .

Définition 1.15. Soit a un élément de X . On dit que f est continue au point a , ou en a , si $f(x)$ possède une limite quand x tend vers a .

Lemme 1.9. Soit a un point de X . Si f est continue en a , alors la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $f(a)$.

Démonstration : Soit ℓ la limite de $f(x)$ quand x tend vers a . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, dès que l'on a $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Puisque a est dans X et que $|a - a| = 0$, on a donc $|f(a) - \ell| < \varepsilon$, d'où $\ell = f(a)$.

Corollaire 1.4. La fonction f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication

$$(16) \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

La condition (16) signifie que f est «à peu près» constante au voisinage de a , ou est constante à ε près au voisinage de a . Elle peut aussi se reformuler comme suit. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout h avec $a + h \in X$, on ait l'implication

$$(17) \quad |h| < \alpha \implies |f(a + h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.16. On dit que f est continue dans X si f est continue en tout point de X .

Remarque 1.4. Soit b un point adhérent à X qui n'est pas dans X . Pour que f possède une limite ℓ quand x tend vers b , il faut et il suffit que la fonction g définie dans l'ensemble $X \cup \{b\}$ par $g(x) = f(x)$ pour $x \in X$ et $g(b) = \ell$, soit continue au point b .

Exemple 1.9. Soit n un entier naturel. Vérifions directement que la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe x^n est continue sur \mathbb{R} , ce que la proposition suivante confirmera. On peut supposer $n \geq 1$. Soient a un nombre réel et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer que si h est assez petit, on a $|(a + h)^n - a^n| < \varepsilon$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(a + h)^n - a^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^k h^{n-k},$$

d'où l'inégalité

$$|(a + h)^n - a^n| \leq |h| \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k |a|^k |h|^{n-k-1} \right).$$

Par ailleurs, pour tout $k = 0, \dots, n-1$, on a

$$C_n^k \leq n C_{n-1}^k,$$

d'où il résulte que

$$|(a+h)^n - a^n| \leq n|h|(|a| + |h|)^{n-1}.$$

Si l'on a $|h| < 1$, on obtient ainsi

$$|(a+h)^n - a^n| \leq n|h|(1 + |a|)^{n-1},$$

de sorte que l'on a l'implication

$$|h| < 1 \quad \text{et} \quad |h| < \frac{\varepsilon}{n(1 + |a|)^{n-1}} \implies |(a+h)^n - a^n| < \varepsilon,$$

ce qui établit l'assertion.

Exemple 1.10. Il existe des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs réelles qui sont continues en aucun point. Tel est le cas de la fonction caractéristique de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels i.e. de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En effet, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et, comme on l'a déjà signalé, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'est aussi. Soit a un élément de \mathbb{Q} (resp. de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). Pour tout $r > 0$, il existe donc x dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (resp. dans \mathbb{Q}) tel que $|x - a| < r$. L'égalité $|f(x) - f(a)| = 1$ entraîne alors que f n'est pas continue en a .

Comme conséquence directe de la proposition 1.8, on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 1.10. Soient X une partie de \mathbb{R} et f, g des fonctions définies sur X à valeurs dans \mathbb{C} . Soit a un point de X en lequel f et g soient continues.

- 1) Les fonctions $f + g$ et fg sont continues en a .
- 2) Si $f(a) \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$ pour tout x assez proche de a , et la fonction $\frac{1}{f}$, définie pour $f(x) \neq 0$, est continue en a .

Exemple 1.11. Les fractions rationnelles $\frac{p(x)}{q(x)}$, où p et q sont des fonctions polynômes, sont donc continues sur leurs domaines de définition. En particulier, tel est le cas de la fonction qui à x associe x^n traitée ci-dessus.

Proposition 1.11 (Fonctions composées). Soient X et Y des parties de \mathbb{R} , f une application de X dans Y et g une application de Y dans \mathbb{C} . Soit a un point de X . Supposons f continue en a et g continue en $f(a)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration : Posons $b = f(a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ dès que $|y - b| < \alpha$. De même, il existe $\beta > 0$ tel que l'on ait $|f(x) - b| < \alpha$

dès que $|x - a| < \beta$. Pour tout $x \in X$ tel que $|x - a| < \beta$, on obtient $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, d'où l'assertion.

Démontrons ici le théorème des valeurs intermédiaires, qui est un résultat essentiel sur les fonctions continues.

Théorème 1.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Tout nombre réel dans l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ est dans l'image de f .*

Cet énoncé signifie que pour tout nombre réel y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$ ou bien $f(b) \leq y \leq f(a)$, suivant que $f(a)$ soit ou non plus petit que $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. Autrement dit, toute valeur «intermédiaire» entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f .

Démonstration : Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer $f(a) \leq f(b)$. Soit y un nombre réel tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$. Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}.$$

Il est non vide, car a est dans E , et il est majoré par b . Par suite, E possède une borne supérieure c . On a les inégalités $a \leq c \leq b$, car c majore E et c'est le plus petit des majorants de E . Vérifions que l'on a

$$(18) \quad f(c) = y.$$

Supposons $f(c) < y$. Posons $\varepsilon = y - f(c)$. On a $\varepsilon > 0$. Par ailleurs, on a $c \neq b$, d'où $c < b$. Puisque f est continue en c , il existe donc $\alpha > 0$, avec $\alpha < b - c$ de sorte que $]c, c + \alpha[$ soit contenu dans $[c, b]$, tel que l'on ait

$$x \in]c, c + \alpha[\implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $x_0 \in]c, c + \alpha[$ tel que l'on ait $f(x_0) - f(c) < \varepsilon$. On obtient $f(x_0) < y$ donc x_0 appartient à E , et l'inégalité $c < x_0$ contredit le fait que c majore E .

Supposons $f(c) > y$. Posons $\varepsilon' = f(c) - y$. On a $\varepsilon' > 0$. De plus, on a $c > a$. La fonction f étant continue en c , il existe $\beta > 0$, avec $\beta < c - a$ de sorte que $]c - \beta, c]$ soit contenu dans $[a, c]$, tel que l'on ait

$$x \in]c - \beta, c] \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon'.$$

Pour tout $x \in]c - \beta, c]$ on a donc $f(x) > y$. Parce que c est un majorant de E et qu'il n'existe pas d'éléments de E dans $]c - \beta, c]$, on en déduit que $c - \beta$ majore E , d'où une contradiction car c est le plus petit des majorants de E .

Cela établit l'égalité (18) et le résultat.

Corollaire 1.5. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Si l'on a $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration : D'après l'hypothèse faite, 0 est dans l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, donc est dans l'image de f .

Corollaire 1.6 (Bolzano, 1817). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : Soient u, v des éléments de $f(I)$ et w un nombre réel vérifiant les inégalités $u < w < v$. Il existe x et y dans I tels que $f(x) = u$ et $f(y) = v$. Si par exemple $x < y$, alors $[x, y]$ est contenu dans I car I est un intervalle (th. 1.2), et w appartient à $f([x, y])$ (th. 1.3). Ainsi w est dans $f(I)$, et le théorème 1.2 entraîne le résultat.

Exemple 1.12. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Il existe un élément $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$. En effet, supposons $f(a) \neq a$ et $f(b) \neq b$, et considérons la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. On a $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$. D'après le corollaire 1.5, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où l'assertion.

9. Fonctions dérivables

Soient I un intervalle de \mathbb{R} ayant au moins deux points, autrement dit un intervalle infini, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Étant donné un point $a \in I$ fixé, soit $\Delta_a(f)$ la fonction définie pour tout $x \in I - \{a\}$ par l'égalité

$$\Delta_a(f)(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition 1.17. Soit a un point de I . On dit que f est dérivable au point a , ou en a , si $\Delta_a(f)$ possède une limite en a , autrement dit, si $\Delta_a(f)(x)$ possède une limite quand x tend vers a dans $I - \{a\}$. Dans ce cas, si ℓ est la limite, on écrit parfois

$$(19) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \Delta_a(f)(x) = \ell,$$

et ℓ s'appelle le nombre dérivé de f en a . On note $\ell = f'(a)$.

La restriction portant sur I , à savoir que I ne soit pas vide ni un singleton, se justifie par le fait que a doit être adhérent à $I - \{a\}$, ce qui n'est pas le cas si I est vide ou bien si $I = \{a\}$. L'égalité (19) signifie que le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tend vers ℓ quand h tend vers 0 par valeurs différentes de 0, en supposant implicitement que $a + h$ reste dans I .

Remarque 1.5. La motivation de la notion de dérivée est d'essayer d'approcher f au voisinage de a par une fonction linéaire affine $g(x) = cx + d$. Dans cet objectif, en demandant que $f(a) = g(a)$, on obtient $g(x) = c(x - a) + f(a)$. Il faut alors choisir la constante c de façon adéquate. L'erreur que l'on commet en remplaçant f par g est

$$f(x) - g(x) = (x - a)(\Delta_a(f)(x) - c).$$

Afin de la minimiser, il convient donc de choisir c de sorte que $\Delta_a(f)(x) - c$ soit le plus petit possible au voisinage de a . Il en sera ainsi dans le cas où $\Delta_a(f)(x) - c$ tend vers 0 quand x tend vers a par valeurs distinctes de a , et on est alors amené à choisir $c = f'(a)$. Dans ce cas, la fonction qui à x associe

$$(20) \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

s'appelle la fonction linéaire tangente à f en a et l'équation (20) est celle de la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Lemme 1.10. Soit a un point de I . Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration : Supposons f dérivable en a . Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x dans $I - \{a\}$ vérifiant $|x - a| < \alpha$, on ait

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < 1.$$

Il en résulte l'inégalité

$$|f(x) - f(a)| < |x - a|(1 + |f'(a)|).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in I$, on a donc l'implication

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{1 + |f'(a)|} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est continue en a .

Définition 1.18. Soit a un point de I .

- 1) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $[a, a + r[$ soit contenu dans I . On dit que f est dérivable à droite en a si $\Delta_a(f)(x)$ possède une limite quand x tend vers a dans $I \cap]a + \infty[$.
- 2) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a]$ soit contenu dans I . On dit que f est dérivable à gauche en a si $\Delta_a(f)(x)$ possède une limite quand x tend vers a dans $I \cap]-\infty, a[$.

Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a , on note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) les limites correspondantes. Dans ce cas, on dit que $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) est le nombre dérivé à droite (resp. à gauche) de f en a .

Remarque 1.6. Le fait pour f d'être dérivable à droite en a signifie que la restriction de f à l'intervalle $I \cap [a + \infty[$ est dérivable en a . De même, dire que f est dérivable à gauche en a signifie que la restriction de f à $I \cap] - \infty, a]$ est dérivable en a . On notera que les hypothèses faites dans la définition 1.18 entraînent que les intervalles $I \cap [a + \infty[$ et $I \cap] - \infty, a]$ sont infinis.

Définition 1.19. Soit a un point de I . On dit que a est intérieur à I s'il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[$ soit contenu dans I .

Lemme 1.11. Soit a un point intérieur à I . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est dérivable en a .
 - 2) f est dérivable à droite et à gauche en a et l'on a $f'_d(a) = f'_g(a)$.
- Si tel est le cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration : Supposons f est dérivable en a , et posons $\ell = f'(a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I - \{a\}$ et $|x - a| < \alpha$, on ait $|\Delta_a(f)(x) - \ell| < \varepsilon$. En particulier, cette inégalité est satisfaite pour tout x tel que $|x - a| < \alpha$ et $x \in I \cap]a + \infty[$ ou $x \in I \cap] - \infty, a[$, d'où la condition 2, et on a alors $\ell = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Inversement, posons $\ell = f'_d(a) = f'_g(a)$. Soit ε un nombre réel > 0 . Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a + \infty[$ et $|x - a| < \alpha_1$, on ait $|\Delta_a(f)(x) - \ell| < \varepsilon$. De même, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap] - \infty, a[$ et $|x - a| < \alpha_2$, on ait $|\Delta_a(f)(x) - \ell| < \varepsilon$. Par suite, pour tout $x \in I - \{a\}$ tel que $|x - a| < \text{Min}(\alpha_1, \alpha_2)$, on a $|\Delta_a(f)(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$.

Remarque 1.7. Considérons la fonction sur \mathbb{R} qui à x associe $|x|$. Elle n'est pas dérivable en 0, car en 0 son nombre dérivé à droite vaut 1, et celui à gauche vaut -1 . Cela étant, elle est continue en 0, et sur \mathbb{R} tout entier, vu que pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Elle fournit un contre-exemple à la réciproque de l'assertion du lemme 1.10. Signalons qu'il existe des fonctions continues sur \mathbb{R} et dérivables en aucun point.

Définition 1.20. Si f est dérivable en chaque point de I , on dit que f est dérivable sur I . Dans ce cas, l'application définie sur I , qui à $x \in I$ associe $f'(x)$, s'appelle la fonction dérivée de f . On la note f' .

Exemples 1.13.

- 1) Si f est constante sur I , sa fonction dérivée est nulle sur I .

2) Soit n un entier naturel non nul. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = nx^{n-1}$. En effet, pour tout $h \neq 0$ on a

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k-1} = nx^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k x^k h^{n-k-1}.$$

Pour tout $k = 0, \dots, n-2$, le terme $C_n^k x^k h^{n-k-1}$ tend vers 0 quand h tend vers 0, et il en est donc de même de la somme de ces termes, ce qui entraîne l'assertion.

Rappelons que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite croissante dans I , si pour tous x et y dans I tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$. Elle est strictement croissante si l'on a $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$. On a une définition analogue pour les fonctions décroissantes et strictement décroissantes. En fait, f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante. On utilisera dans le chapitre IV le résultat suivant, qui sera démontré au chapitre VI :

Théorème 1.4. *Supposons f continue sur I et dérivable en tout point intérieur à I .*

- 1) *Pour que f soit croissante dans I , il faut et il suffit que l'on ait $f'(x) \geq 0$ pour tout point x intérieur à I .*
- 2) *Si l'on a $f'(x) > 0$ pour tout point x intérieur à I , alors f est strictement croissante dans I .*

Notons que la réciproque de la seconde assertion est fausse en général, comme on le constate en considérant la fonction sur \mathbb{R} qui à x associe x^3 .