

Chapitre VI - Fonctions dérivables

Tous les intervalles de \mathbb{R} considérés dans ce chapitre sont supposés infinis. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I . Rappelons qu'étant donné un point a de I , on dit que f est dérivable en a si la limite du rapport

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe quand x tend vers a dans $I - \{a\}$. Dans ce cas, cette limite est le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a . De plus, si f est dérivable en a , alors f est continue en a (lemme 1.10). Si f est dérivable en tout point de I , on dispose de la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$, qui s'appelle la fonction dérivée de f .

Table des matières

1. Règles de calcul des dérivées	1
2. Dérivées des fonctions usuelles	4
3. Extremum local	6
4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis	8
5. Monotonie et dérivabilité	11
6. Prolongement des fonctions dérivées	12
7. Dérivées d'ordre supérieur	13
8. Formule de Taylor-Lagrange	16
9. Formule de Taylor-Young	20
10. Calcul approché des zéros d'une fonction	24

1. Règles de calcul des dérivées

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Proposition 6.1. Soient f et g des fonctions réelles définies sur I et dérivables en $a \in I$.

- 1) La fonction $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- 2) La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3) Si $g(a)$ est non nul, la fonction $\frac{f}{g}$, qui est non nulle au voisinage de a , est dérivable en a et l'on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration : Soit x un élément de I distinct de a .

1) On a

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Le second membre de cette égalité tend vers $f'(a) + g'(a)$ quand x tend vers a , d'où l'assertion.

2) On a

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a},$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right)g(x) + f(a)\left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right).$$

Puisque g est continue en a , la limite de $g(x)$ quand x tend vers a est $g(a)$, donc le second membre de cette égalité a pour limite $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3) La fonction g est continue en a et $g(a) \neq 0$, donc g est non nulle au voisinage de a (prop. 1.10). Pour x voisin de a , on écrit que l'on a

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)},$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right)g(a) - f(a)\left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) \right),$$

puis le résultat.

Proposition 6.2 (Dérivée d'une fonction composée). Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} , a un point de I , f une application de I dans J et g une application de J dans \mathbb{R} . Supposons f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a

$$(1) \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration : Soit $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $u \in J$ par les égalités

$$\gamma(u) = \frac{g(u) - g(f(a))}{u - f(a)} \quad \text{si } u \neq f(a) \quad \text{et} \quad \gamma(f(a)) = g'(f(a)).$$

Puisque g est dérivable en $f(a)$, la fonction γ est continue en ce point. La fonction f étant continue en a , il en résulte que $\gamma \circ f$ est continue en a (prop. 1.11). En particulier, on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \gamma(f(t)) = \gamma(f(a)) = g'(f(a)).$$

Pour tout $t \in I$, $t \neq a$, on a

$$\frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(a)}{t - a} = \gamma(f(t)) \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

(si $f(t) = f(a)$ les deux membres de cette égalité sont nuls). Le fait que f soit dérivable en a entraîne alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(a)}{t - a} = g'(f(a)) f'(a),$$

et la formule (1).

Proposition 6.3 (Dérivée d'une fonction réciproque). Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ un homéomorphisme de I sur J . Soit $g : J \rightarrow I$ l'application réciproque de f . Supposons f dérivable en un point $a \in I$. Pour que g soit dérivable au point $f(a)$ il faut et il suffit que l'on ait $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$(2) \quad g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration : Supposons g dérivable en $f(a)$. D'après la proposition 6.2, $g \circ f$ est alors dérivable en a et l'on a $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$. Puisque $g \circ f$ est l'application identique de I , qui est dérivable, de nombre dérivé 1 en tout point de I , on obtient l'égalité $1 = g'(f(a)) f'(a)$. Par suite, on a $f'(a) \neq 0$ et la formule (2).

Inversement, supposons $f'(a) \neq 0$. Posons $b = f(a)$, de sorte que $a = g(b)$. Soit ε un nombre réel > 0 . Puisque f est dérivable en a , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in I$ on ait

$$t \neq a \quad \text{et} \quad |t - a| < \alpha \implies \left| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

La fonction g étant continue sur J , il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $u \in J$ on ait

$$|u - b| < \beta \implies |g(u) - g(b)| < \alpha.$$

Pour tout $u \neq b$, on a $g(u) \neq g(b)$. On en déduit l'implication

$$u \neq b \quad \text{et} \quad |u - b| < \beta \implies \left| \frac{f(g(u)) - f(g(b))}{g(u) - g(b)} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

On a $f(g(u)) = u$ et $f(g(b)) = b$, d'où

$$u \neq b \quad \text{et} \quad |u - b| < \beta \implies \left| \frac{u - b}{g(u) - g(b)} - f'(a) \right| < \varepsilon,$$

autrement dit, on a

$$\lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u \neq b}} \frac{u - b}{g(u) - g(b)} = f'(a).$$

Parce que $f'(a) \neq 0$, il en résulte que

$$\lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u \neq b}} \frac{g(u) - g(b)}{u - b} = \frac{1}{f'(a)},$$

donc g est dérivable en b , ce qui établit le résultat.

Corollaire 6.1. Soient I et J des intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ un homéomorphisme de I sur J . Soit $g : J \rightarrow I$ l'application réciproque de f . Supposons f dérivable en tout point de I et $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Alors, g est dérivable sur J et l'on a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \text{pour tout } x \in J.$$

2. Dérivées des fonctions usuelles

Comme conséquence de ce qui précède, on va expliciter, là où elles sont définies, les fonctions dérivées des fonctions usuelles définies antérieurement. Rappelons que la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et qu'elle coïncide avec sa fonction dérivée (prop. 5.1).

Proposition 6.4. La fonction logarithme népérien $\text{Log} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'on a

$$\text{Log}' x = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Démonstration : Le corollaire 6.1 utilisé avec $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$, $f = \exp$ et $g = \text{Log}$, entraîne le résultat (prop. 5.1 et 5.4).

Proposition 6.5. Soit r un nombre rationnel. La fonction puissance $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^r , est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'on a

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Démonstration : 1) Supposons que l'on ait $r = \frac{1}{n}$ où n est un entier ≥ 1 . D'après la proposition 5.3, la fonction $]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ qui à x associe x^n , est un homéomorphisme sur $]0, +\infty[$. De plus, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et sa fonction dérivée est celle qui à x associe nx^{n-1} . Elle est partout non nulle, d'où le résultat dans ce cas (cor. 6.1).

2) Posons $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers relatifs avec $q \geq 1$. Considérons les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = x^{\frac{1}{q}} \quad \text{et} \quad g(x) = x^p \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Elles sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (alinéa 1) et l'on a $(g \circ f)(x) = x^r$ pour tout $x > 0$. D'après la proposition 6.2, $g \circ f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'on a

$$(g \circ f)'(x) = g'(x^{\frac{1}{q}})f'(x) = \frac{p}{q} \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Remarque 6.1. La proposition précédente est valable pour tout $r \in \mathbb{R}$. Pour le vérifier, on peut utiliser directement le fait que l'on a (déf. 5.4)

$$x^r = e^{r \operatorname{Log} x} \quad \text{pour tout } x > 0,$$

et appliquer les propositions 5.1, 6.2 et 6.4.

Proposition 6.6. Soit a un nombre réel > 0 . La fonction $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ qui à x associe a^x est dérivable sur \mathbb{R} et l'on a

$$\exp'_a(x) = a^x \operatorname{Log} a \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : C'est une conséquence des propositions 5.1 et 6.2.

Passons aux dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.

Proposition 6.7. La fonction arc sinus $\operatorname{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est dérivable sur $] -1, 1[$, et l'on a

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

Démonstration : La fonction sinus est un homéomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $] -1, 1[$ (cf. prop. 5.5). Elle y est dérivable et sa fonction dérivée, qui est la fonction cosinus, y est partout non nulle. La fonction arc sinus est donc dérivable sur $] -1, 1[$, et l'on a (cor. 6.1 et formule (16) du chapitre V)

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

Proposition 6.8. La fonction arc cosinus $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est dérivable sur $] - 1, 1[$, et l'on a

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in] - 1, 1[.$$

Démonstration : C'est une conséquence directe du lemme 5.6 et de la proposition 6.7.

Proposition 6.9. La fonction arc tangente $\text{Arctg} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable sur \mathbb{R} , et l'on a

$$\text{Arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : La fonction tangente est un homéomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} (prop. 5.6). Elle y est dérivable et pour tout x dans cet intervalle on a $\text{tg}' x = 1 + \text{tg}^2 x$, qui est non nul. La fonction arc tangente est donc dérivable sur \mathbb{R} et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ (formule (22) du chapitre V)

$$\text{Arctg}' x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{Arctg } x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3. Extremum local

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 6.1. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et a un point intérieur à I i.e. il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[$ soit contenu dans I .

1) On dit que f a un maximum local en a , ou que $f(a)$ est un maximum local, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[$ soit contenu dans I , et que pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ on ait $f(x) \leq f(a)$.

2) On dit que f a un minimum local en a , ou que $f(a)$ est un minimum local, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[$ soit contenu dans I , et que pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ on ait $f(a) \leq f(x)$.

Un maximum ou un minimum local est appelé un extremum local.

Exemples 6.1.

1) Soit f la fonction caractéristique des rationnels : on a $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est un extremum local.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit (cf. exemples 5.1, alinéa 4). Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ on pose $f(x) = 0$. Si x est rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec p et q premiers entre eux, tels que $x = \frac{p}{q}$. On pose alors $f(x) = \frac{1}{q}$. Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x)$ est un maximum local.

Soit x_0 un nombre rationnel. Posons $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ avec $p_0 \in \mathbb{Z}$, $q_0 \in \mathbb{N}$ et p_0, q_0 premiers entre eux. Considérons l'ensemble

$$E = \left\{ r \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap \mathbb{Q} \mid r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq q < q_0 \right\}.$$

Il est fini, vu que l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels que $q(x_0 - 1) \leq p \leq q(x_0 + 1)$ avec $1 \leq q < q_0$ est fini. Par suite, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$ et que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit contenu dans $\mathbb{R} - E$. Pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap \mathbb{Q}$, on a donc $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $q \geq q_0$, d'où $f(x) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_0}$. Vu que f est nulle sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on a donc

$$f(x) \leq \frac{1}{q_0} = f(x_0) \quad \text{pour tout } x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,$$

ce qui établit l'assertion.

Proposition 6.10. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I et a un point intérieur à I . Si f est dérivable en a et si $f(a)$ est un extremum local, on a $f'(a) = 0$.

Démonstration : Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que $f(a)$ est un maximum local. Il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[$ soit contenu dans I et que pour tout x dans $]a - \alpha, a + \alpha[$ on ait $f(x) \leq f(a)$. On a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in]a - \alpha, a[.$$

Puisque f est dérivable en a , f est dérivable à gauche de a . Si $f'_g(a)$ est le nombre dérivé de f à gauche en a , on en déduit par passage à la limite que l'on a

$$(3) \quad f'_g(a) \geq 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in]a, a + \alpha[.$$

Si $f'_d(a)$ est le nombre dérivé de f à droite en a , on a donc comme ci-dessus

$$(4) \quad f'_d(a) \leq 0.$$

Compte tenu de (3) et (4), les égalités $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ entraînent alors $f'(a) = 0$.

Remarque 6.2. La réciproque de la proposition 6.10 est fausse, comme on le constate en considérant la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe x^3 . Sa dérivée en x , qui est $3x^2$, est nulle en 0. Pour autant 0, n'est pas un extremum local, vu que cette fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis

Le théorème de Rolle affirme qu'une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, qui prend la même valeur en a et b , possède un extremum local (et même global) en un point de $]a, b[$.

Théorème 6.1 (Théorème de Rolle). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) f est continue sur $[a, b]$.

2) f est dérivable sur $]a, b[$.

3) On a $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c)$ soit un extremum local. En particulier, on a $f'(c) = 0$.

Démonstration : On peut supposer que f n'est pas constante sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, f est bornée sur cet intervalle et si m (resp. M) est la borne inférieure (resp. la borne supérieure) de $f([a, b])$, on a (th. 5.2)

$$f([a, b]) = [m, M] \quad \text{et} \quad m < M.$$

Si l'on a $f(a) = m$, on a aussi $f(b) = m$ (condition 3), et il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$ (car $m \neq M$). En particulier, $f(c)$ est un maximum local. D'après la seconde condition et la proposition 6.10 on a $f'(c) = 0$. Si $f(a) \neq m$, on a de même $f(b) \neq m$ et il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$. Ainsi $f(c)$ est un minimum local, et l'on a $f'(c) = 0$, d'où le résultat.

Théorème 6.2 (Théorème des accroissements finis). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) f est continue sur $[a, b]$.

2) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que l'on ait $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Démonstration : Considérons la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a).$$

Cette fonction est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et l'on a $g(a) = g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui entraîne le résultat.

Remarques 6.3.

1) Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème 6.2 et Γ son graphe dans \mathbb{R}^2 , i.e. l'ensemble des $(x, f(x))$ où x parcourt $[a, b]$. Posons $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Géométriquement, le théorème des accroissements finis signifie qu'il existe au moins un point d'abscisse x , tel que $a < x < b$, en lequel la tangente à Γ soit parallèle à la droite passant par A et B .

2) Le théorème des accroissement finis peut se reformuler comme suit. Soient a et h des nombres réels, avec $h > 0$, et $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, a + h]$ et dérivable sur $]a, a + h[$. Alors, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$(5) \quad f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h).$$

Voici une application très utile en pratique.

Corollaire 6.2. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Supposons que la fonction dérivée f' de f soit bornée sur I , autrement dit, qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{quels que soient } x, y \in I.$$

Démonstration : Soient x et y deux points de I tels que $x < y$. Le théorème des accroissements finis, appliqué avec la restriction de f à l'intervalle $[x, y]$, entraîne l'existence d'un élément $z \in]x, y[$ tel que l'on ait $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$, d'où l'assertion.

Exemples 6.2.

1) Pour tous x et y dans \mathbb{R} , on a les inégalités (cor. 6.2)

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \text{et} \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

En particulier, les fonctions sinus et cosinus sont uniformément continues sur \mathbb{R} .

2) (**Constante d'Euler**) En application du théorème des accroissements finis et de la règle d'Abel (prop. 3.4), on va définir ici la constante d'Euler. Pour cela, considérons la suite (u_n) définie par les égalités

$$u_{2n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \text{Log} \frac{n+1}{n+2}.$$

Vérifions que la série $\sum u_n$ est convergente. Soit n un entier ≥ 1 . On applique le théorème des accroissements finis avec la fonction logarithme sur l'intervalle $[n, n+1]$: il existe $c \in]n, n+1[$ tel que l'on ait

$$\text{Log}(n+1) - \text{Log} n = \frac{1}{c}.$$

On en déduit les inégalités

$$\frac{1}{n+1} < \text{Log} \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$

autrement dit, on a

$$u_{2n} < |u_{2n-1}| < u_{2n-2}.$$

Par ailleurs, la suite (u_n) est convergente de limite nulle. En effet, (u_{2n}) converge vers 0 et l'on a $u_{2n+1} = -\text{Log}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, de sorte qu'il en est de même de la suite (u_{2n+1}) . Il en résulte que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0. En remarquant que l'on a

$$u_n = (-1)^n |u_n|,$$

(car on a $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$), le corollaire 3.5 entraîne alors l'assertion. Soit S_n le terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. On constate que pour tout $n \geq 1$ on a

$$S_{2n-2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \text{Log } n.$$

La suite (S_{2n-2}) est convergente car tel est le cas de la suite (S_n) . La constante d'Euler γ est alors définie par l'égalité

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \text{Log } n.$$

D'après le corollaire 3.5, on a

$$|\gamma - S_{2n-2}| \leq |u_{2n-1}|,$$

d'où l'on déduit, avec $n = 10^5$, que l'on a

$$0,57721 < \gamma < 0,57724.$$

L'approximation décimale de γ à 10^{-4} près par défaut est donc 0,5772. Signalons que l'on ignore si γ est rationnel ou non.

Voici une généralisation du théorème des accroissements finis.

Corollaire 6.3. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions satisfaisant les conditions suivantes :

1) f et g sont continues sur $[a, b]$.

2) f et g sont dérivables sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que l'on ait l'égalité

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c).$$

Démonstration : Si $g(a) = g(b)$ c'est une conséquence du théorème de Rolle. Supposons $g(a) \neq g(b)$ et posons

$$u = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Considérons la fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$h(x) = f(x) + ug(x).$$

On a $h(a) = h(b)$. De plus, h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, d'où le résultat.

En prenant la fonction $g(x) = x$, on retrouve le théorème des accroissement finis.

5. Monotonie et dérivabilité

Le théorème des accroissement finis a d'importantes conséquences concernant la monotonie des fonctions dérivables sur un intervalle. L'énoncé qui suit a été signalé dans le premier chapitre (th. 1.4).

Théorème 6.3. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I .

- 1) Pour que f soit croissante dans I , il faut et il suffit que l'on ait $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intérieur de I .
- 2) Si l'on a $f'(x) > 0$ pour tout x dans l'intérieur de I , alors f est strictement croissante dans I .
- 3) Pour que f soit décroissante dans I , il faut et il suffit que l'on ait $f'(x) \leq 0$ pour tout x dans l'intérieur de I .
- 4) Si l'on a $f'(x) < 0$ pour tout x dans l'intérieur de I , alors f est strictement décroissante dans I .

Démonstration : 1) Supposons f croissante dans I . Soit x un point intérieur à I . Pour tout $y \in I$ on a l'implication

$$x \neq y \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Par passage à la limite quand y tend vers x , on obtient l'inégalité $f'(x) \geq 0$. Inversement, soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Il existe $z \in]x, y[$ tel que l'on ait $f'(z)(x - y) = f(x) - f(y)$. Puisque z est dans l'intérieur de I , on a $f'(z) \geq 0$, d'où

$$(x - y)f'(z) \leq 0 \quad \text{puis} \quad f(x) \leq f(y),$$

ce qui prouve que f est croissante dans I .

2) L'argument est le même que le précédent. Soient x et y dans I tels que $x < y$. Il existe $z \in]x, y[$ tel que $f'(z)(x - y) = f(x) - f(y)$. Par hypothèse, on a $f'(z) > 0$, d'où

$$(x - y)f'(z) < 0 \quad \text{puis} \quad f(x) < f(y).$$

On en déduit les assertions 3 et 4 en considérant la fonction $-f$.

Comme conséquence des assertions 1 et 3 et du fait qu'une fonction qui est à la fois croissante et décroissante sur un intervalle soit constante, on obtient :

Corollaire 6.4. *Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable dans l'intérieur de I . Pour que f soit constante sur I , il faut et il suffit que l'on ait $f'(x) = 0$ pour tout x dans l'intérieur de I .*

Remarque 6.4. Les réciproques des assertions 2 et 4 sont fausses. Par exemple, la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe x^3 est strictement croissante sur \mathbb{R} , pour autant sa dérivée s'annule en 0.

Exemple 6.3. Soit I un intervalle. Déterminons les fonctions f dérivables sur I telles que $f' = f$. Soit f une telle fonction. Considérons la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Elle est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$. Par suite, g est constante sur I (cor. 6.4), i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $f(x) = \lambda e^x$. Inversement, une telle fonction vérifie la condition demandée. L'ensemble des solutions est donc formé des fonctions proportionnelles à la fonction exponentielle.

6. Prolongement des fonctions dérivées

L'énoncé suivant s'appelle parfois le théorème du prolongement des fonctions dérivées.

Théorème 6.4. *Soient I un intervalle, a un point de I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$. Supposons que $f'(x)$ possède une limite quand x tend vers a par valeurs distinctes de a . Alors, f est dérivable en a et l'on a*

$$(6) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = f'(a).$$

Démonstration : Supposons $I \cap]a, +\infty[$ non vide. Pour tout x dans I tel que $x > a$, il existe $y \in]a, x[$ tel que l'on ait $f(x) - f(a) = (x - a)f'(y)$ (th. 6.2). On en déduit (axiome du choix) l'existence d'une fonction

$$\varphi : I \cap]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout $x \in I \cap]a + \infty[$ on ait

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\varphi(x)) \quad \text{et} \quad \varphi(x) \in]a, x[.$$

D'après l'hypothèse faite, $f'(x)$ possède une limite ℓ quand x tend vers a par valeurs strictement plus grandes que a . Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in I$, on ait

$$u \in]a, a + \alpha[\implies |f'(u) - \ell| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in I \cap]a + \infty[$, on a

$$x \in]a, a + \alpha[\implies \varphi(x) \in]a, a + \alpha[.$$

Il en résulte que pour tout $x \in I \cap]a + \infty[$, on a

$$x \in]a, a + \alpha[\implies |f'(\varphi(x)) - \ell| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$. De la même façon, si $I \cap]-\infty, a[$ est non vide, on montre que f est dérivable à gauche en a et que $f'_g(a) = \ell$. On en déduit que f est dérivable en a et la formule (6) (lemme 1.11).

Nous verrons une application de ce résultat dans le paragraphe qui suit.

7. Dérivées d'ordre supérieur

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I . Posons $f^{(0)} = f$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction dérivée n -ième de f , quand elle existe, par la relation de récurrence

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est dite de classe C^n sur I si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I . Si f est n fois dérivable pour tout $n \geq 1$, on dit que f est de classe C^∞ sur I . Étant donné un point $a \in I$, on dit que f est n fois dérivable en a si la fonction $f^{(n-1)}$ existe sur I et est dérivable en a . La somme et le produit de deux fonctions de classe C^n sur I sont encore de classe C^n . Notons que l'existence de $f^{(n)}$ suppose la continuité de $f^{(n-1)}$ sur I .

Exemples 6.4.

- 1) Les fonctions polynômes sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 2) La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(7) \quad (e^x)^{(n)} = e^x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3) La fonction logarithme est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$ on a

$$(8) \quad \text{Log}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

On le déduit par récurrence en utilisant la proposition 6.4.

4) Soit α un nombre réel. La fonction qui à x associe x^α est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$ on a

$$(9) \quad (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Là encore on le déduit par récurrence en utilisant la proposition 6.5.

5) Les fonctions sinus et cosinus sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(10) \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

6) Les fonctions arc sinus et arc cosinus sont de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. La fonction arc tangente est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

7) Démontrons que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0,$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(0) = 0$.

Pour cela, vérifions d'abord que l'on a

$$(11) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = 0 \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Soit m un entier naturel. Considérons un entier N tel que $2N > m$. Pour tout $x \neq 0$, on a l'inégalité (cf. prop. 4.4)

$$e^{\frac{1}{x^2}} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!x^{2k}}.$$

On en déduit l'existence d'un polynôme Q à coefficients réels de degré $2N$ tel que l'on ait

$$e^{\frac{1}{x^2}} \geq \frac{Q(x)}{N!x^{2N}} \quad \text{et} \quad Q(x) \geq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

On obtient ainsi

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^m} \leq \frac{N!|x|^{2N-m}}{Q(x)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

D'après le choix de N et le fait que $Q(0) \neq 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\frac{N!|x|^{2N-m}}{Q(x)} < \varepsilon \quad \text{dès que } |x| \text{ est assez petit,}$$

d'où l'égalité (11).

Par ailleurs, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* . Plus précisément, il existe une fonction polynôme P_n à coefficients dans \mathbb{R} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$(12) \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

En effet, la relation (12) est vraie si $n = 0$ avec $P_0 = 1$. Si n un entier pour lequel cette condition soit vérifiée, pour tout $x \neq 0$ on a

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2 - 3nx^2)P_n(x),$$

d'où l'assertion.

Il reste à vérifier que f est n fois dérivable en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Supposons $n = 1$. L'égalité (11), appliquée avec $m = 0$, entraîne que f est continue en 0. D'après (11) et (12), on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

Puisque f est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* , f est donc dérivable sur \mathbb{R} et l'on a $f'(0) = 0$ (th. 6.4). Soit n un entier ≥ 1 pour lequel l'assertion soit vraie. La limite de $f^{(n)}(x)$ quand x tend vers 0 est nulle i.e. est égale à $f^{(n)}(0)$, ainsi $f^{(n)}$ est continue en 0, donc aussi sur \mathbb{R} . La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et l'on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f^{(n+1)}(x) = 0,$$

donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$ (*loc. cit.*), d'où le résultat.

Proposition 6.11 (Leibniz). Soient I un intervalle et f, g des fonctions n fois dérivables sur I . Alors fg est n fois dérivable sur I , et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(13) \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration : L'énoncé est vrai si $n = 0$. Soit $n \geq 0$ un entier tel qu'il le soit aussi relativement à n . Supposons que f et g soient $n+1$ fois dérivables sur I . D'après la formule (13) et la proposition 6.1, fg est $n+1$ fois dérivable sur I , et l'on a

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k)})'.$$

d'où les égalités

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $j = k + 1$ dans la première somme, on obtient

$$\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)}.$$

On en déduit que

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)} g + fg^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n (C_n^{j-1} + C_n^j) f^{(j)} g^{(n-j+1)}.$$

Par ailleurs, on a la relation

$$C_n^{j-1} + C_n^j = C_{n+1}^j.$$

On a ainsi

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j f^{(j)} g^{(n-j+1)},$$

ce qui prouve l'énoncé pour l'entier $n + 1$, d'où le résultat.

8. Formule de Taylor-Lagrange

Elle est de nature globale et généralise le théorème des accroissements finis. Soit n un entier naturel.

Théorème 6.5 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que l'on ait*

$$(14) \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration : Considérons la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par l'égalité

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A,$$

où A est un nombre réel choisi de sorte que l'on ait

$$\varphi(a) = 0.$$

D'après les hypothèses faites, cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que l'on ait $\varphi'(c) = 0$. Pour tout $x \in]a, b[$ on a

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}A.$$

L'égalité $\varphi'(c) = 0$ implique alors

$$A = f^{(n+1)}(c),$$

d'où la formule (14) en écrivant que l'on a $\varphi(a) = 0$.

Remarque 6.5. Avec les hypothèses du théorème 6.5, la formule (14) est encore vraie en échangeant a et b (avec un autre élément c). Plus précisément, il existe $d \in]a, b[$ tel que l'on ait

$$(15) \quad f(a) = \sum_{k=0}^n \frac{(a-b)^k}{k!}f^{(k)}(b) + \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(d).$$

On le constate avec la même démonstration que celle ci-dessus, en considérant sur $[a, b]$ la fonction auxiliaire

$$\psi(x) = f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{(a-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) - \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}B,$$

où B est choisi de sorte que $\psi(b) = 0$.

Voici une autre formulation de ce résultat.

Théorème 6.6. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I . Soient x_0 un point de I et h un nombre réel non nul tels que $[x_0 - |h|, x_0 + |h|]$ soit contenu dans I . Il existe $\theta \in]0, 1[$, qui dépend de h , tel que l'on ait

$$(16) \quad f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

Démonstration : Compte tenu de la remarque 6.5, il suffit d'utiliser la formule (14) avec $a = x_0$ et $b = x_0 + h$ si $h > 0$, et la formule (15) avec $a = x_0 + h$ et $b = x_0$ si $h < 0$.

Avec $x_0 = 0$ dans la relation (16), on obtient :

Corollaire 6.5 (Formule de Mac Laurin). Soient I un intervalle contenant 0, f une fonction réelle $n+1$ fois dérivable sur I , et h un nombre réel non nul tel que $[-|h|, |h|]$ soit contenu dans I . Il existe $\theta \in]0, 1[$, qui dépend de h , tel que l'on ait

$$f(h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h).$$

On déduit de ce qui précède les résultats suivants.

Proposition 6.12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}.$$

Démonstration : Soit x un nombre réel non nul. On utilise la formule de Mac Laurin avec $I = \mathbb{R}$, $h = x$ et $f = \exp$. Soit n un entier naturel. Pour tout $k \geq 0$, on a $f^{(k)} = f$ (formule (7)). Il existe donc $\theta \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

La suite $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$ tend vers 0 (exemples 2.1). On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

qui est la formule annoncée.

Proposition 6.13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités

$$\cos x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Démonstration : Soient n un entier naturel et x un nombre réel.

Pour tout $j \geq 0$ on a (formule (10))

$$\cos^{(j)}(0) = \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right).$$

On obtient $\cos^{(j)}(0) = 0$ si j est impair, et $\cos^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{j}{2}}$ si j est pair. Il existe donc $\theta \in]0, 1[$ tel que (cor. 6.5)

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos^{(2n+1)}(\theta x).$$

Puisque l'on a $|\cos^{(2n+1)}(\theta x)| \leq 1$, on en déduit

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ce qui entraîne la première égalité. De même, pour tout $j \geq 0$, on a

$$\sin^{(j)}(0) = \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right).$$

Par suite, on a $\sin^{(j)}(0) = 0$ si j est pair, et $\sin^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{j-1}{2}}$ si j est impair. Il existe donc $\xi \in]0, 1[$ tel que l'on ait (*loc. cit.*)

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\xi x),$$

ce qui entraîne le résultat.

Proposition 6.14. *Pour tout $x \in [0, 1]$, on a l'égalité*

$$\text{Log}(1+x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Démonstration : La formule est vraie pour $x = 0$. Soit x un élément de $]0, 1]$. On utilise ici la formule de Taylor-Lagrange avec $a = 0$, $b = x$ et $f : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $t \in [0, x]$ par $f(t) = \text{Log}(1+t)$. On a (cf. prop. 6.2)

$$f^{(n)}(t) = \text{Log}^{(n)}(1+t) \quad \text{pour tout } t \in [0, x].$$

Vu la formule (8), on a donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)! \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Soit n un entier ≥ 1 . On a $f(0) = 0$. Il existe donc $c \in]0, x[$ tel que l'on ait (th. 6.5)

$$f(x) = \text{Log}(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

d'où l'inégalité

$$\left| \operatorname{Log}(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}.$$

Avec la formule (8), on obtient

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}.$$

Puisque l'on a $c > 0$, il en résulte que

$$\left| \operatorname{Log}(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui conduit à l'égalité annoncée.

9. Formule de Taylor-Young

Ce résultat, qui est de nature locale, est très utile pour le calcul des limites.

Théorème 6.7 (Formule de Taylor-Young). Soient I un intervalle, a un point de I , n un entier ≥ 1 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I . On suppose que $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable en a , autrement dit, que f est n fois dérivable en a . Pour tout $x \in I - \{a\}$, posons

$$(17) \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right).$$

On a l'égalité

$$(18) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, on a

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{x-a} (f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Puisque f est dérivable en a , la formule (18) est vraie dans ce cas. Considérons alors un entier $n \geq 2$ et supposons l'énoncé démontré pour l'entier $n-1$. Par hypothèse, f' est $n-1$ fois dérivable en a . En utilisant l'hypothèse de récurrence avec la fonction f' , on en déduit que l'on a

$$(19) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \left(f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) \right) = 0.$$

Soit $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in I$ par l'égalité

$$\psi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Elle est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a (avec $j = k - 1$)

$$\psi'(x) = f'(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j+1)}(a).$$

Soit ε un nombre réel > 0 . D'après (19), il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I - \{a\}$ on ait l'implication

$$|x - a| < \alpha \implies \left| \frac{\psi'(x)}{(x-a)^{n-1}} \right| < \varepsilon.$$

Par suite, pour tout $x \in I$, on a (si $x = a$, on a $\psi'(a) = 0$)

$$(20) \quad |x - a| < \alpha \implies |\psi'(x)| \leq \varepsilon |x - a|^{n-1}.$$

Considérons alors la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par

$$g(x) = \frac{\varepsilon}{n} |x - a|^n.$$

Parce que $n \geq 2$, cette fonction est dérivable sur I , et l'on a pour tout $x \in I$

$$(21) \quad |g'(x)| = \varepsilon |x - a|^{n-1}.$$

D'après (20) et (21) pour tout $x \in I$ on a ainsi

$$(22) \quad |x - a| < \alpha \implies |\psi'(x)| \leq |g'(x)|.$$

Soit x un élément de $I - \{a\}$ tel que $|x - a| < \alpha$. On utilise alors le corollaire 6.3 (une généralisation du théorème des accroissements finis) avec les fonctions ψ et g sur l'intervalle $[a, x]$ ou bien $[x, a]$, selon que x soit plus grand ou plus petit que a . Il existe c dans $]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que l'on ait

$$(\psi(x) - \psi(a))g'(c) = (g(x) - g(a))\psi'(c).$$

On a $\psi(a) = g(a) = 0$, d'où

$$\psi(x)g'(c) = g(x)\psi'(c).$$

D'après (21) on a $g'(c) \neq 0$ (car $a \neq c$). On déduit alors de (22) que l'on a

$$|\psi(x)| = \frac{|\psi'(c)|}{|g'(c)|} g(x) \leq g(x).$$

On obtient ainsi

$$\frac{|\psi(x)|}{|x-a|^n} < \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

Cela entraîne l'égalité (18) et prouve le théorème.

Remarque 6.6. La formule de Taylor-Young peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction sur I , continue au point a , telle que $\varepsilon(a) = 0$.

Exemples 6.5.

Sans rentrer ici dans les détails, la formule de Taylor-Young permet d'obtenir les développements limités des fonctions usuelles en 0. On déduit, avec les relations (7) à (10), les formules suivantes dans lesquelles ε désigne une fonction définie sur un voisinage de 0, continue en 0, telle que $\varepsilon(0) = 0$.

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x), & \sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x), \\ \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \varepsilon(x), & \text{Log}(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Pour tout nombre rationnel r , on a

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Par exemple, on obtient

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x), \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \varepsilon(x).$$

Exemples 6.6.

1) Vérifions que l'on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Log} \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

En posant, pour x dans un voisinage de 0, $h(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, on déduit que l'on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Log}(1+h(x))}{h(x)} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Log} \cos x}{h(x)} = 1.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{\text{Log} \cos x}{x^2} = \left(\frac{\text{Log} \cos x}{h(x)} \right) \left(\frac{h(x)}{x^2} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{h(x)}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

d'où le résultat.

2) Vérifions que l'on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{Arctg} x - x}{\text{tg} x - x} = -1.$$

On a vu que la fonction arc tangente est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\text{Arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \text{Arctg}^{(2)} x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Puisque l'on a

$$\frac{\text{Arctg}^{(2)} x}{x} = -\frac{2}{(1+x^2)^2},$$

on obtient

$$\text{Arctg}'(0) = 1, \quad \text{Arctg}^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arctg}^{(3)}(0) = -2,$$

puis l'égalité

$$\text{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \varepsilon(x) = 0.$$

Par ailleurs, sur un voisinage convenable de 0, par exemple $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est aussi de classe C^∞ , et pour tout x dans un tel voisinage on a

$$\text{tg}' x = 1 + \text{tg}^2 x \quad \text{et} \quad \text{tg}^{(2)} x = 2 \text{tg} x (1 + \text{tg}^2 x).$$

La limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 est 1, la fonction cosinus est continue en 0 et $\cos 0 = 1$.

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{tg} x}{x} = 1 \quad \text{puis} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\text{tg}^{(2)} x}{x} = 2.$$

On a donc

$$\text{tg}'(0) = 1, \quad \text{tg}^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{tg}^{(3)}(0) = 2,$$

d'où

$$\text{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\eta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \eta(x) = 0,$$

puis l'égalité annoncée.

10. Calcul approché des zéros d'une fonction

Étant donné un intervalle I de \mathbb{R} et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit qu'un nombre réel α est un zéro de f ou une racine de l'équation $f(x) = 0$, si l'on a $f(\alpha) = 0$. Afin de déterminer ces racines éventuelles, il convient d'abord de les séparer, autrement dit de déterminer des intervalles contenant chacun une unique racine. On peut parfois y parvenir en utilisant le résultat suivant.

Proposition 6.15. *Soient a et b des nombres réels dans I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, il existe $\alpha \in]a, b[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.*

Démonstration : D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un zéro de f dans $]a, b[$. Si f est strictement monotone dans $[a, b]$ alors f est injective, d'où l'assertion.

Exemple 6.7. Considérons l'équation

$$(23) \quad \sin x = \frac{x}{2}.$$

Vérifions qu'elle possède une unique racine strictement positive, et qu'elle appartient à $]\frac{\pi}{2}, 2[$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie (23), on $|\alpha| \leq 2$. Soit $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x}{2} - \sin x.$$

Elle est dérivable sur cet intervalle et l'on a $g'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$. Par suite, on a $g'(x) < 0$ si $x \in [0, \frac{\pi}{3}[$ et $g'(x) > 0$ si $x \in]\frac{\pi}{3}, 2]$. D'après le théorème 6.3, g est donc strictement décroissante dans $[0, \frac{\pi}{3}]$ et strictement croissante dans $[\frac{\pi}{3}, 2]$. Par ailleurs, on a

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad g(2) > 0,$$

d'où l'assertion (prop. 6.15).

Supposons que l'on ait déterminé un intervalle $[a, b]$ dans lequel f possède un unique zéro. On va décrire certaines méthodes, dans le cas où f est suffisamment régulière, permettant d'en déterminer une valeur approchée. Commençons par le principe d'itération qui est une variante du théorème du point fixe déjà rencontré (th. 2.6).

1. Méthode d'itération

Elle repose sur le résultat suivant.

Théorème 6.8. Soient I un intervalle fermé de \mathbb{R} (borné ou non) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$|f'(x)| \leq \lambda \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Soit (x_n) une suite d'éléments de I satisfaisant la condition

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors, la suite (x_n) est convergente et sa limite est l'unique point fixe de f . Si α est le point fixe de f , on a

$$(24) \quad |x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué avec la fonction f sur $[x, y]$, on déduit que l'on a l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

L'inégalité (15) du théorème 2.6 est donc remplie. Comme dans la démonstration de ce théorème, on prouve que (x_n) est de Cauchy, donc est convergente. Puisque I est fermé, sa limite est dans I (cf. lemme 2.5). La fonction f étant continue sur I , c'est donc un point fixe de f (cor. 2.3). En utilisant l'inégalité ci-dessus, on vérifie de même que f a un unique point fixe, puis l'inégalité (24).

Exemple 6.8. Considérons l'équation

$$(25) \quad xe^x = \frac{1}{2}.$$

Vérifions qu'elle possède une unique racine, qui est nécessairement positive, et déterminons son approximation décimale à 10^{-5} par défaut. On utilise pour cela le théorème 6.8 avec $I = [0, +\infty[$ et la fonction $f : I \rightarrow I$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}.$$

Elle est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2},$$

de sorte que l'on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Par suite, f possède un unique point fixe i.e. l'équation (25) a un unique zéro α . On définit la suite (x_n) avec $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. D'après l'inégalité (24), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En évaluant x_{20} on en déduit que l'on a

$$0,351731 \leq \alpha \leq 0,351735.$$

L'approximation décimale à 10^{-5} par défaut de α est donc 0,35173.

2. Interpolation linéaire

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$. On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont connus. Étant donné $c \in]a, b[$ on cherche à déterminer $f(c)$. Pour cela, on peut effectuer ce que l'on appelle une interpolation linéaire, qui consiste à remplacer f par sa corde, autrement dit, par la droite de \mathbb{R}^2 passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, dont l'équation est

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

et à calculer l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse c . On a

$$\xi = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $f(c)$ et il s'agit ensuite de d'estimer l'erreur commise en remplaçant ξ par $f(c)$.

Puisque f est supposée de classe C^2 , f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée seconde $f^{(2)}$ est continue sur $[a, b]$. La fonction $f^{(2)}$ est donc bornée sur $[a, b]$. Notons M la borne supérieure de l'ensemble des $|f^{(2)}(x)|$ pour $x \in [a, b]$.

Proposition 6.16. *On a l'inégalité*

$$|f(c) - \xi| \leq \frac{M(b - a)^2}{8}.$$

Démonstration : Considérons la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Elle est bornée sur $[a, b]$, car elle est continue sur cet intervalle. Soient ℓ et L respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de φ sur $[a, b]$. Puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on a donc $\ell \leq 0$ et $L \geq 0$. Ces bornes sont atteintes par φ . Par suite, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$|\varphi(x_0)| = \text{Max}(|\ell|, L).$$

Le point x_0 est intérieur à $[a, b]$ et est un extremum local de φ , on a donc (prop. 6.10)

$$\varphi'(x_0) = 0.$$

On utilise alors la formule de Taylor-Lagrange pour φ sur $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ à l'ordre 2 (i.e. avec $n = 1$) et la remarque 6.5 : il existe $\xi_1 \in]a, x_0[$ et $\xi_2 \in]x_0, b[$ tels que l'on ait

$$\varphi(a) = \varphi(x_0) + (a - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{(a - x_0)^2}{2}\varphi^{(2)}(\xi_1),$$

$$\varphi(b) = \varphi(x_0) + (b - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{(b - x_0)^2}{2}\varphi^{(2)}(\xi_2).$$

Compte tenu des égalités $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(x_0) = 0$, on obtient

$$|\varphi(x_0)| = \frac{(a - x_0)^2}{2}|\varphi^{(2)}(\xi_1)| = \frac{(b - x_0)^2}{2}|\varphi^{(2)}(\xi_2)|.$$

Par ailleurs, φ est de classe C^2 sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$ on a $\varphi^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$. Il en résulte que l'on a

$$|\varphi(x_0)| \leq \frac{(a - x_0)^2}{2}M \quad \text{et} \quad |\varphi(x_0)| \leq \frac{(b - x_0)^2}{2}M.$$

Vu que l'on a

$$(a - x_0)^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4} \quad \text{ou} \quad (b - x_0)^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4},$$

on en déduit que

$$|\varphi(x_0)| \leq \frac{M(b - a)^2}{8}.$$

L'égalité $\varphi(c) = f(c) - \xi$ et l'inégalité $|\varphi(c)| \leq |\varphi(x_0)|$ entraînent alors le résultat.

On obtient comme conséquence le résultat suivant, qui constitue la méthode des parties proportionnelles de Lagrange.

Corollaire 6.6. *Supposons $f(a)f(b) < 0$ et f strictement monotone dans $[a, b]$. Soit α l'unique zéro de f dans $[a, b]$. Posons*

$$r = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Soient N la borne inférieure de $|f'|$ et M la borne supérieure de $|f^{(2)}|$ sur $[a, b]$. On a

$$8N|r - \alpha| \leq M(b - a)^2.$$

Démonstration : On peut supposer $r \neq \alpha$. Considérons l'interpolation linéaire de f sur $[a, b]$ i.e. l'ensemble des points $(x, g(x))$ où

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{avec } x \in [a, b].$$

On vérifie que l'on a $g(r) = 0$ (r est l'unique zéro de g , qui est dans $[a, b]$, car $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et donc $g(a)g(b) < 0$). On en déduit l'égalité

$$\frac{g(\alpha)}{\alpha - r} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{g(\alpha)}{\alpha - r} = f'(c).$$

On obtient ainsi

$$N|r - \alpha| \leq |g(\alpha)|.$$

D'après la proposition 6.14, on a (vu que $f(\alpha) = 0$)

$$|g(\alpha) - f(\alpha)| = |g(\alpha)| \leq \frac{M(b - a)^2}{8},$$

d'où le résultat.

3. Méthode des sécantes de Lagrange

C'est un raffinement de la précédente. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et strictement monotone sur $[a, b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit α l'unique zéro de f dans $[a, b]$. On suppose de plus que

$$(26) \quad f^{(2)}(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Cette condition signifie que f est convexe sur $[a, b]$, autrement dit que pour tous y et z dans $[a, b]$ avec $y < z$, le graphe de f est « en dessous » du segment d'extrémité $(y, f(y))$ et $(z, f(z))$. Plus précisément, si $g : [y, z] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$(27) \quad g(x) = f(y) + \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(x - y), \quad \text{on a } f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Afin de déterminer une valeur approchée de α , on construit par récurrence une suite d'éléments de $[a, \alpha]$ comme suit. Posons $x_0 = a$. Soit x_1 la racine de l'interpolation linéaire de f sur $[a, b]$, définie par

$$g_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On a

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)},$$

et les inégalités

$$(28) \quad a \leq x_1 \leq \alpha.$$

En effet, on a $g_1(a) = f(a) < 0$ et $g_1(b) = f(b) > 0$, d'où $a \leq x_1 \leq b$, et d'après la condition (27), on a $f(x_1) \leq g_1(x_1) = 0$, d'où $x_1 \leq \alpha < b$ et les inégalités (28). En remplaçant a par x_1 on obtient ainsi une meilleure approximation de α . Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, on définit x_n comme étant la racine de l'interpolation linéaire de f sur $[x_{n-1}, b]$, définie par

$$g_n(x) = f(x_{n-1}) + \frac{f(b) - f(x_{n-1})}{b - x_{n-1}}(x - x_{n-1}).$$

On a

$$(29) \quad x_n = \frac{x_{n-1}f(b) - bf(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Comme ci-dessus on a alors les inégalités

$$(30) \quad a \leq x_{n-1} \leq x_n \leq \alpha < b.$$

Soient

$$M_0 = \sup |f|, \quad m_1 = \inf |f'| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup f^{(2)},$$

respectivement la borne supérieure des $|f(x)|$, la borne inférieure des $|f'(x)|$ et la borne supérieure des $f^{(2)}(x)$ pour $x \in [a, b]$ (qui existent car f est de classe C^2 sur $[a, b]$). Supposons $m_1 \neq 0$ et posons

$$\lambda = \frac{M_0 M_2}{2m_1^2}.$$

Proposition 6.17. *La suite (x_n) est convergente de limite α . Si l'on a $0 < \lambda < 1$, alors*

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - a| \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : Posons $I = [a, \alpha]$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \frac{xf(b) - bf(x)}{f(b) - f(x)} \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On a

$$\varphi(x) = x - \frac{b - x}{f(b) - f(x)} f(x),$$

d'où $\varphi(\alpha) = \alpha$ et α est l'unique point fixe de φ . De plus, on a

$$(31) \quad x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Supposons $0 < \lambda < 1$. D'après (30), x_n est dans I . Compte tenu du théorème 6.8, utilisé avec l'intervalle I et la fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit alors de vérifier que l'on a

$$(32) \quad |\varphi'(x)| \leq \lambda \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Soit x un élément de I . En utilisant par exemple l'égalité

$$\varphi(x) = b - f(b) \frac{x - b}{f(x) - f(b)},$$

on vérifie que l'on a

$$(33) \quad \varphi'(x) = -f(b) \frac{f(x) - f(b) - (x - b)f'(x)}{(f(x) - f(b))^2}.$$

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec la fonction f sur $[x, b]$, on obtient

$$|f(x) - (x - b)f'(x) - f(b)| \leq M_2 \frac{(b - x)^2}{2}.$$

Le théorème des accroissements finis appliqué avec f sur $[x, b]$ entraîne l'inégalité

$$|f(x) - f(b)| \geq m_1 |x - b|.$$

L'égalité (33) implique alors (32) et le résultat.

Exemple 6.9. Reprenons l'exemple 6.7 et déterminons l'approximation décimale à 10^{-6} près par défaut de la racine positive α de l'équation

$$\sin x = \frac{x}{2}.$$

On a vu que l'on a $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2$. La fonction $f : [\frac{\pi}{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ est convexe et satisfait les hypothèses faites au début de ce paragraphe avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = 2$. On vérifie que l'on a

$$m_1 = \frac{1}{2}, \quad M_0 \leq 0,22 \quad \text{et} \quad M_2 = 1.$$

Par suite, on a $\lambda \leq 0,44$. On déduit de la proposition 6.17, avec ses notations, que l'on a

$$|x_n - \alpha| \leq |x_1 - a| \times \frac{0,44^n}{0,56} \leq 0,54 \times 0,44^n.$$

En évaluant x_{20} , on constate que l'on a

$$1,8954942 \leq \alpha \leq 1,8954944.$$

L'approximation cherchée de α est donc 1,895494.

4. Méthode de Newton

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et strictement monotone sur $[a, b]$, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Soit α l'unique zéro de f dans $[a, b]$. Supposons que l'on ait

$$(34) \quad f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad f^{(2)}(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Soient

$$M_0 = \text{Sup } |f|, \quad m_1 = \text{Inf } f' \quad \text{et} \quad M_2 = \text{Sup } f^{(2)},$$

respectivement la borne supérieure des $|f(x)|$, la borne inférieure des $f'(x)$ et la borne supérieure des $f^{(2)}(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Afin de déterminer une valeur approchée de α , on construit une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ convergente vers α comme suit. On pose

$$x_0 = b.$$

L'idée est ensuite de remplacer f par sa « tangente » au point $(b, f(b))$, autrement dit, par la fonction

$$g_1(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Sa racine est

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

On a les inégalités

$$(35) \quad \alpha \leq x_1 < b.$$

En effet, d'après la seconde condition de (34), f est convexe sur $[a, b]$ et l'on a

$$g_1(x) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On a donc $g_1(\alpha) \leq f(\alpha) = 0$. Puisque $g_1(b) = f(b) > 0$ cela entraîne (35). En particulier, x_1 est une meilleure approximation que b de α , et l'on « remplace » b par x_1 . Pour tout $n \geq 1$, on définit par récurrence x_n comme étant le zéro de la fonction $g_n : [a, x_{n-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

On a

$$(36) \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

et les inégalités

$$(37) \quad a < \alpha \leq x_n \leq x_{n-1} < b.$$

Posons

$$\lambda = \frac{M_0 M_2}{m_1^2}.$$

Proposition 6.18. *La suite (x_n) est convergente de limite α . Si l'on a $0 < \lambda < 1$, alors*

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - b| \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Démonstration : Posons $I = [a, b]$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a $\varphi(\alpha) = \alpha$ et α est l'unique point fixe de φ . De plus, on a

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

D'après (37), x_n appartient à I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifie que l'on a

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f^{(2)}(x)}{f'(x)^2},$$

d'où l'inégalité

$$|\varphi'(x)| \leq \lambda \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Le théorème 6.8, utilisé avec l'intervalle I et la fonction φ , entraîne alors le résultat.