

## Chapitre VII - Intégrale de Riemann

La notion d'intégrale est apparue avec Archimède (287-212 avant J.-C.) afin de calculer des aires et des volumes. Le problème de base est le suivant. Étant donnée une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $[a, b]$  à valeurs réelles, il s'agit de donner un sens à la mesure

$$\int_a^b f(x)dx$$

de l'aire de la partie du plan comprise entre le graphe de  $f$ , les verticales  $x = a$  et  $x = b$ , et l'horizontale  $y = 0$ , en comptant positivement les aires situées au-dessus de la droite  $y = 0$  et négativement les autres. Il existe plusieurs théories de l'intégration. Celle que l'on va présenter ici est due à Riemann. On précisera en particulier ce que signifie pour  $f$  d'être intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , et on verra que cela repose sur la possibilité d'encadrer  $f$  de façon convenable par des fonctions en escalier.

### Table des matières

1. Fonctions en escalier	1
2. Intégrale d'une fonction en escalier	4
3. Fonctions intégrables au sens de Riemann	6
4. Critères d'intégrabilité - Exemples	10
5. Propriétés algébriques	18
6. Ordre fonctionnel - Formule de la moyenne - Inégalité de Schwarz	21
7. Sommes de Riemann	23
8. Intégrales et primitives	26
9. Intégration par parties	32
10. Formule de Taylor avec reste intégral	38
11. Formule du changement de variable	39
12. Calcul approché d'une intégrale	41

### 1. Fonctions en escalier

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ .

**Définition 7.1.** On appelle subdivision de  $[a, b]$  toute famille finie  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  (avec  $n \geq 1$ ) de points de  $[a, b]$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

- 1) on a  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .
- 2) Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a  $x_{k-1} < x_k$ .

**Notation.** On notera souvent  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  la subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $[a, b]$ .

**Définition 7.2.** Soit  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision de  $[a, b]$ . Le nombre réel

$$h(\sigma) = \text{Max} \left\{ x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n \right\},$$

s'appelle le pas de  $\sigma$ .

On a toujours  $h(\sigma) \leq b - a$ .

**Exemples 7.1.**

- 1)  $(a, b)$  et  $(a, \frac{a+b}{2}, b)$  sont des subdivisions de  $[a, b]$ .
- 2) Pour tout  $n \geq 1$  la subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  où

$$x_k = a + k \left( \frac{b-a}{n} \right),$$

est une subdivision à  $n + 1$  points de  $[a, b]$ . Son pas est  $\frac{b-a}{n}$ .

**Définition 7.3.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$ , s'il existe une subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit constante sur chacun des intervalles ouverts  $]x_{k-1}, x_k[$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

Étant données une fonction en escalier sur  $[a, b]$  et une subdivision  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $[a, b]$ , on dit que  $\sigma$  est adaptée à  $f$  si  $f$  est constante sur chacun des intervalles ouverts  $]x_{k-1}, x_k[$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

**Exemples 7.2.** Les fonctions constantes et la fonction partie entière sur  $[a, b]$  sont en escalier.

**Remarque 7.1.** Une fonction en escalier  $f$  sur  $[a, b]$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une subdivision adaptée à  $f$ , ce sont les  $f(x_k)$  et les  $n$  valeurs que prend  $f$  sur chacun des intervalles  $]x_{k-1}, x_k[$ . Elle est en particulier bornée. Cela étant, une fonction sur  $[a, b]$  peut ne prendre qu'un nombre fini de valeurs sans être en escalier. Tel est le cas de la fonction caractéristique des rationnels.

**Définition 7.4.** Soient  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  et  $\tau = (y_0, \dots, y_p)$  des subdivisions de  $[a, b]$ .

- 1) On dit que  $\sigma$  est plus fine que  $\tau$  si  $\{x_0, \dots, x_n\}$  contient  $\{y_0, \dots, y_p\}$ .
- 2) On appelle subdivision réunion de  $\sigma$  et  $\tau$ , on la note  $\sigma \cup \tau$ , la subdivision  $(z_0, \dots, z_t)$  de  $[a, b]$  telle que  $\{z_0, \dots, z_t\} = \{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_p\}$ .

Si  $\sigma$  est une subdivision adaptée à une fonction en escalier  $f$  sur  $[a, b]$ , toute subdivision plus fine que  $\sigma$  est aussi adaptée à  $f$ . En particulier :

**Lemme 7.1.** *Soient  $f$  et  $g$  des fonctions en escalier définies sur  $[a, b]$  et  $\sigma, \tau$  des subdivisions adaptées respectivement à  $f$  et  $g$ . Alors  $\sigma \cup \tau$  est adaptée à  $f$  et  $g$ .*

Démonstration : La subdivision  $\sigma \cup \tau$  est plus fine que  $\sigma$  et  $\tau$ , d'où l'assertion.

**Corollaire 7.1.** *Soient  $f$  et  $g$  des fonctions en escalier définies sur  $[a, b]$ . Pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $\alpha f + \beta g$  et  $fg$  sont en escalier.*

Démonstration : D'après le lemme précédent, il existe une subdivision adaptée à  $f$  et  $g$ . Par ailleurs, si  $f$  et  $g$  sont constantes sur un intervalle, il en est de même des fonctions  $\alpha f + \beta g$  et  $fg$  sur cet intervalle.

**Remarque 7.2.** Une fonction en escalier continue sur  $[a, b]$  est constante.

**Théorème 7.1.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction en escalier  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'on ait*

$$(1) \quad |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Démonstration : Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$  on ait l'implication

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$  de pas  $h(\sigma) < \alpha$  : une telle subdivision existe, il suffit de prendre

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad \text{avec} \quad \frac{b-a}{n} < \alpha.$$

Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$  on a donc  $|x_k - x_{k-1}| < \alpha$ . Soit alors  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction en escalier définie pour  $k = 1, \dots, n$ , par les égalités

$$\varphi(x) = f(x_k) \quad \text{si} \quad x \in [x_{k-1}, x_k[ \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b).$$

Elle vérifie la condition (1). En effet, on a  $f(b) = \varphi(b)$ , et pour tout  $x < b$  il existe un entier  $k$  tel que  $x$  appartienne à  $[x_{k-1}, x_k[$ . On a ainsi  $|x - x_k| < \alpha$ , ce qui entraîne

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

**Corollaire 7.2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Il existe une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$  on ait

$$n \geq n_0 \implies |f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

Démonstration : D'après le théorème 7.1, pour tout  $n \geq 1$  il existe une fonction en escalier  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'on ait

$$(2) \quad |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On en déduit l'existence d'une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)$  satisfaisant la condition (2). Par ailleurs, il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_0$ , d'où le résultat.

## 2. Intégrale d'une fonction en escalier

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier. Étant donnée une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  adaptée à  $f$ , posons

$$(3) \quad I(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{où} \quad f(x) = \lambda_k \quad \text{pour tout } x \in ]x_{k-1}, x_k[.$$

**Proposition 7.1.** Soient  $\sigma$  et  $\tau$  des subdivisions adaptées à  $f$ . On a  $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$ .

Démonstration : Posons  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  et  $f(x) = \lambda_k$  si  $x \in ]x_{k-1}, x_k[$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Soit  $c$  un point de  $[a, b]$ . Il existe un entier  $k$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $c$  appartienne à  $[x_{k-1}, x_k]$ . Soit  $\sigma'$  la subdivision de  $[a, b]$  obtenue en adjoignant  $c$  à l'ensemble des points de  $\sigma$ . Montrons que l'on a  $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$ . Si  $c = x_{k-1}$  ou bien si  $c = x_k$ , on a  $\sigma = \sigma'$  auquel cas l'égalité est vérifiée. Supposons  $x_{k-1} < c < x_k$ . Les nombres réels  $I(f, \sigma)$  et  $I(f, \sigma')$  ne diffèrent que par les deux termes

$$(x_k - x_{k-1})\lambda_k \quad \text{et} \quad (x_k - c)\alpha_k + (c - x_{k-1})\beta_k,$$

où  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont respectivement les valeurs de  $f$  sur  $]c, x_k[$  et  $]x_{k-1}, c[$ . Puisque l'on a  $\alpha_k = \beta_k = \lambda_k$  et que  $x_k - x_{k-1} = (x_k - c) + (c - x_{k-1})$ , il en résulte que l'on a  $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$ .

Si  $\sigma$  est plus fine que  $\tau$ , compte tenu de ce qui précède, on déduit par récurrence sur le cardinal du complémentaire de l'ensemble des points de  $\tau$  dans celui des points de  $\sigma$ , que l'on a  $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$ . Dans le cas général, vu que  $\sigma \cup \tau$  est plus fine que  $\sigma$  et  $\tau$ , on obtient  $I(f, \sigma) = I(f, \sigma \cup \tau) = I(f, \tau)$ .

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction en escalier comme suit.

**Définition 7.5.** Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier. On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  le nombre réel  $I(f, \sigma)$ , où  $\sigma$  est une subdivision quelconque de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ . On le notera  $I_{[a, b]}(f)$  ou plus simplement  $I(f)$  si cela ne prête pas à confusion.

D'après la proposition 7.1,  $I(f)$  ne dépend pas de la subdivision choisie adaptée à  $f$ , ce qui justifie cette définition. En prenant la formule (3) comme définition de l'aire dans la situation envisagée ici, on retrouve la notion d'aire connue depuis l'enfance, à savoir que «l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur», et que l'aire d'une réunion disjointe de rectangles est la somme des aires de chacun d'eux.

### Remarques 7.3.

1) Dans le calcul de  $I(f)$ , les valeurs que prend  $f$  aux points d'une subdivision qui lui est adaptée n'interviennent pas.

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  qui ne diffèrent que par un nombre fini de points, on a  $I(f) = I(g)$ . En particulier, si  $f$  est nulle sauf en un nombre fini de points, on a  $I(f) = 0$ .

### Exemples 7.3.

1) Si  $f$  est constante égal à  $\lambda$  sur  $[a, b]$ , en choisissant comme subdivision  $(a, b)$ , on constate que  $I(f) = \lambda(b - a)$ .

2) Soit  $E$  la fonction partie entière sur l'intervalle  $[1, \frac{11}{2}]$ . On a  $I_{[1, \frac{11}{2}]}(E) = \frac{25}{2}$  (prendre la subdivision  $(1, 2, 3, 4, 5, \frac{11}{2})$ ).

**Proposition 7.2.** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ .

1) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des nombres réels. On a

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

2) Si pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $f(x) \geq g(x)$ , alors  $I(f) \geq I(g)$ .

3) Soient  $m$  et  $M$  respectivement un minorant et un majorant de  $f$  sur  $[a, b]$ . On a

$$m(b - a) \leq I(f) \leq M(b - a).$$

4) (Relation de Chasles) Soit  $c$  un point de  $]a, b[$ . Alors  $f$  est en escalier sur les intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et l'on a

$$I_{[a, b]}(f) = I_{[a, c]}(f) + I_{[c, b]}(f).$$

5) La fonction  $|f|$  est en escalier sur  $[a, b]$  et l'on a  $|I(f)| \leq I(|f|)$ .

Démonstration : 1) Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$  et  $g$  (il en existe d'après le lemme 7.1). Elle est aussi adaptée à  $\alpha f + \beta g$ . Pour  $k = 1, \dots, n$ , posons

$$f(x) = \lambda_k \quad \text{et} \quad g(x) = \mu_k \quad \text{pour tout } x \in ]x_{k-1}, x_k[.$$

On a

$$I(\alpha f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \alpha \lambda_k = \alpha I(f) \quad \text{et} \quad I(\beta g) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \beta \mu_k = \beta I(g),$$

$$I(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k),$$

d'où la formule annoncée.

2) Compte tenu de l'assertion 1, il suffit de montrer que si  $f(x)$  est positif pour tout  $x \in [a, b]$  alors  $I(f) \geq 0$ , ce qui est une conséquence directe de la définition.

3) Pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $m \leq f(x) \leq M$ . En notant encore  $m$  (resp.  $M$ ) la fonction constante égale à  $m$  (resp.  $M$ ) sur  $[a, b]$ , on a  $I(m) = m(b - a)$  et  $I(M) = M(b - a)$ . L'assertion 2 entraîne les inégalités annoncées.

4) En utilisant une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$  qui contient  $c$ , on obtient des subdivisions des intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$  adaptées à  $f$  sur chacun d'eux. La relation de Chasles résulte alors de la définition.

5) Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$ . La fonction  $|f|$  est aussi constante sur chacun des intervalles  $]x_{k-1}, x_k[$ , donc elle est en escalier, et  $\sigma$  est une subdivision qui lui est adaptée. Si  $f(x) = \lambda_k$  pour  $x \in ]x_{k-1}, x_k[$ , on a

$$|I(f)| = \left| \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \lambda_k \right| \leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) |\lambda_k| = I(|f|).$$

### 3. Fonctions intégrables au sens de Riemann

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **bornée** sur  $[a, b]$ . On va définir le fait pour  $f$  d'être intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , en définissant ce que l'on appelle l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Considérons pour cela l'ensemble  $\mathcal{E}^+(f)$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  qui majorent  $f$ , autrement dit, l'ensemble des fonctions en escalier  $\Phi$  sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$  on ait  $f(x) \leq \Phi(x)$ . De même, soit  $\mathcal{E}^-(f)$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  qui minorent  $f$ , i.e. l'ensemble des fonctions en escalier  $\varphi$  sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$  on ait  $\varphi(x) \leq f(x)$ .

**Définition 7.6 (Fonctions de Darboux).** Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , notons  $M_k$  la borne supérieure de  $f([x_{k-1}, x_k])$  (qui existe car  $f$  est majorée) et  $m_k$  la borne inférieure de  $f([x_{k-1}, x_k])$  (qui existe car  $f$  est minorée).

1) On appelle fonction de Darboux supérieure associée à  $f$  et  $\sigma$ , la fonction  $\Phi_{f,\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par les égalités

$$\Phi_{f,\sigma}(x) = M_k \quad \text{pour tout } x \in ]x_{k-1}, x_k[ \quad (k \geq 1),$$

$$\Phi_{f,\sigma}(x_k) = f(x_k) \quad (k \geq 0).$$

2) On appelle fonction de Darboux inférieure associée à  $f$  et  $\sigma$ , la fonction  $\varphi_{f,\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par les égalités

$$\varphi_{f,\sigma}(x) = m_k \quad \text{pour tout } x \in ]x_{k-1}, x_k[ \quad (k \geq 1),$$

$$\varphi_{f,\sigma}(x_k) = f(x_k) \quad (k \geq 0).$$

Étant donnée une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ , les fonctions  $\Phi_{f,\sigma}$  et  $\varphi_{f,\sigma}$  sont en escalier et  $\sigma$  leur est adaptée.

**Lemme 7.2.** Pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ ,  $\Phi_{f,\sigma}$  est dans  $\mathcal{E}^+(f)$  et  $\varphi_{f,\sigma}$  est dans  $\mathcal{E}^-(f)$ . En particulier,  $\mathcal{E}^+(f)$  et  $\mathcal{E}^-(f)$  sont non vides.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la définition.

**Lemme 7.3.** Soient  $\Phi$  une fonction dans  $\mathcal{E}^+(f)$  et  $\sigma$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $\Phi$ . On a  $\Phi_{f,\sigma}(x) \leq \Phi(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ . De même, si  $\varphi$  est une fonction dans  $\mathcal{E}^-(f)$  et  $\sigma$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $\varphi$ , on a  $\varphi(x) \leq \varphi_{f,\sigma}(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

Démonstration : Posons  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ . On a  $\Phi_{f,\sigma}(x_k) = f(x_k) \leq \Phi(x_k)$  pour tout  $k = 0, \dots, n$ . Si  $x$  est un élément de  $[a, b]$  distinct des  $x_k$ , il existe  $k$  tel que  $x$  appartienne à  $]x_{k-1}, x_k[$ . Puisque  $\sigma$  est adaptée à  $\Phi$ , cette fonction est constante sur l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ . Par suite,  $\Phi(x)$  est un majorant de  $f([x_{k-1}, x_k])$ , d'où  $\Phi_{f,\sigma}(x) \leq \Phi(x)$  d'après la définition de la borne supérieure. La démonstration en ce qui concerne la fonction  $\varphi$  est analogue.

Posons

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{ I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^+(f) = \left\{ I(\Phi) \mid \Phi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

D'après le lemme 7.2, ce sont deux sous-ensembles non vides de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 7.2.** 1) L'ensemble  $\mathcal{I}^-(f)$  possède une borne supérieure. On la notera  $I^-(f)$ .  
2) L'ensemble  $\mathcal{I}^+(f)$  possède une borne inférieure. On la notera  $I^+(f)$ .

3) On a  $I^-(f) \leq I^+(f)$ .

Démonstration : Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels tels que  $x \in \mathcal{I}^-(f)$  et  $y \in \mathcal{I}^+(f)$ . On a  $x = I(\varphi)$  et  $y = I(\Phi)$  où  $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$  et  $\Phi \in \mathcal{E}^+(f)$ . Pour tout  $t \in [a, b]$  on a  $\varphi(t) \leq f(t) \leq \Phi(t)$ , d'où  $I(\varphi) \leq I(\Phi)$  (prop. 7.2) i.e.  $x \leq y$ . Par suite, tout élément de  $\mathcal{I}^+(f)$  majore  $\mathcal{I}^-(f)$ , et tout élément de  $\mathcal{I}^-(f)$  minore  $\mathcal{I}^+(f)$ . Ces ensembles étant non vides, cela prouve les deux premières assertions. Pour tout  $y \in \mathcal{I}^+(f)$ , puisque  $y$  majore  $\mathcal{I}^-(f)$ , on a  $I^-(f) \leq y$ . Ainsi  $I^-(f)$  minore  $\mathcal{I}^+(f)$ , d'où l'inégalité  $I^-(f) \leq I^+(f)$ .

**Définition 7.7.** Le nombre réel  $I^-(f)$  est appelé *intégrale inférieure* de  $f$  sur  $[a, b]$ , et  $I^+(f)$  est appelé *intégrale supérieure* de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Lemme 7.4.** Si  $f$  est une fonction en escalier sur  $[a, b]$ , on a  $I^-(f) = I^+(f) = I(f)$ .

Démonstration : Puisque  $f$  appartient à  $\mathcal{E}^-(f)$  on a  $I(f) \leq I^-(f)$ , et  $f$  étant dans  $\mathcal{E}^+(f)$  on a  $I^+(f) \leq I(f)$ , d'où le résultat (th. 7.2).

**Exemple 7.4.** Soit  $f$  la fonction caractéristique des rationnels sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Rappelons que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 0$  sinon. Vérifions que l'on a

$$(4) \quad I^-(f) = 0 \quad \text{et} \quad I^+(f) = 1.$$

D'abord 1 est un minorant de  $\mathcal{I}^+(f)$ . En effet, considérons un élément de  $\Phi \in \mathcal{E}^+(f)$  et  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[0, 1]$  adaptée à  $\Phi$ . Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe un rationnel dans chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ . La fonction  $\Phi$  étant constante sur  $]x_{k-1}, x_k[$ , on a donc  $\Phi(x) \geq 1$  pour tout  $x \in ]x_{k-1}, x_k[$ . D'après la formule (3) on obtient

$$I(\Phi) \geq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 sur  $[0, 1]$  appartient à  $\mathcal{E}^+(f)$  et  $I(1) = 1$ . Il en résulte que 1 est le plus grand des minorants de  $\mathcal{I}^+(f)$ , d'où  $I^+(f) = 1$ .

De même, 0 est un majorant de  $\mathcal{I}^-(f)$ . En effet, soient  $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$  et  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[0, 1]$  adaptée à  $\varphi$ . Puisque  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe un irrationnel dans chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ , d'où l'on déduit que l'on a  $\varphi(x) \leq 0$  pour tout  $x$  dans  $]x_{k-1}, x_k[$ . D'après la formule (3) on a donc  $I(\varphi) \leq 0$ . La fonction nulle sur  $[0, 1]$  étant dans  $\mathcal{E}^-(f)$  et son intégrale étant nulle, 0 est donc le plus petit des majorants de  $\mathcal{I}^-(f)$ , d'où  $I^-(f) = 0$  et les égalités (4).

On en arrive à l'objectif de ce paragraphe.



**Définition 7.8.** Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$  si l'on a

$$I^-(f) = I^+(f).$$

Dans ce cas, ce nombre réel est appelé intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Notation.** Étant donnée une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable au sens de Riemann sur  $[a, b]$ , son intégrale sur  $[a, b]$  est notée

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)dt \cdots,$$

où  $x, t, \dots$ , sont des lettres muettes.

Dans la suite, on dira plus simplement qu'une fonction est intégrable pour signifier qu'elle est intégrable au sens de Riemann. Par définition, une fonction intégrable sur  $[a, b]$  est une fonction bornée sur  $[a, b]$ . Pour une fonction  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ , on peut alors définir l'aire de la partie du plan comprise entre le graphe de  $f$ , et les droites  $x = a$ ,  $x = b$  et  $y = 0$ , comme étant  $\int_a^b f$ . Notons que la définition d'une fonction intégrable peut se traduire comme suit.

**Lemme 7.5.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. Elle est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si les ensembles  $\mathcal{I}^-(f)$  et  $\mathcal{I}^+(f)$  sont adjacents. Dans ce cas,  $\int_a^b f$  est l'unique nombre réel vérifiant les inégalités

$$x \leq \int_a^b f \leq y \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathcal{I}^-(f) \times \mathcal{I}^+(f).$$

Démonstration : L'ensemble  $\mathcal{I}^-(f)$  est non vide majoré et  $\mathcal{I}^+(f)$  est non vide minoré. Compte tenu de la définition 1.8, l'égalité  $I^-(f) = I^+(f)$  signifie précisément que  $\mathcal{I}^-(f)$  et  $\mathcal{I}^+(f)$  sont adjacents. La proposition 1.7 entraîne alors le résultat.

### Exemples 7.5.

1) D'après le lemme 7.4 toute fonction en escalier  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et l'on a

$$I(f) = \int_a^b f.$$

2) Il résulte de (4) que la fonction caractéristique des rationnels sur  $[0, 1]$  n'est pas intégrable (au sens de Riemann).

#### 4. Critères d'intégrabilité - Exemples

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ .

**Théorème 7.3.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- 2) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Phi \in \mathcal{E}^+(f)$  et  $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$  telles que l'on ait  $I(\Phi - \varphi) < \varepsilon$ .

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable. Les ensembles  $\mathcal{I}^-(f)$  et  $\mathcal{I}^+(f)$  sont alors adjacents (lemme 7.5). Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . D'après la proposition 1.6, il existe donc  $x \in \mathcal{I}^-(f)$  et  $y \in \mathcal{I}^+(f)$  tels que l'on ait  $y - x < \varepsilon$ , et la seconde condition est satisfaite. Inversement, on a vu que pour tout  $(x, y) \in \mathcal{I}^-(f) \times \mathcal{I}^+(f)$  on a  $x \leq y$  (dém. du th. 7.2). Si la seconde condition de l'énoncé est satisfaite,  $\mathcal{I}^-(f)$  et  $\mathcal{I}^+(f)$  sont donc des ensembles adjacents (prop. 1.6), autrement dit  $f$  est intégrable.

**Définition 7.9 (Sommes de Darboux).** Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , notons  $M_k$  la borne supérieure de  $f([x_{k-1}, x_k])$  et  $m_k$  la borne inférieure de  $f([x_{k-1}, x_k])$ .

- 1) On appelle somme de Darboux supérieure associée à  $f$  et  $\sigma$ , le nombre réel

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

- 2) On appelle somme de Darboux inférieure associée à  $f$  et  $\sigma$ , le nombre réel

$$s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}).$$

D'après la définition des fonctions de Darboux  $\Phi_{f,\sigma}$  et  $\varphi_{f,\sigma}$  associées à  $f$  et à  $\sigma$  (déf. 7.6), on a les égalités

$$(5) \quad s(f, \sigma) = I(\varphi_{f,\sigma}) \quad \text{et} \quad S(f, \sigma) = I(\Phi_{f,\sigma}).$$

**Théorème 7.4.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- 2) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  telle que  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$ .

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . D'après le théorème 7.3, il existe des fonctions  $\Phi \in \mathcal{E}^+(f)$  et  $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$  telles que l'on ait  $I(\Phi - \varphi) < \varepsilon$ .

Par ailleurs, il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  adaptée à  $\Phi$  et  $\varphi$  (lemme 7.1). D'après le lemme 7.3, pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\varphi(x) \leq \varphi_{f,\sigma}(x) \leq \Phi_{f,\sigma}(x) \leq \Phi(x).$$

Il en résulte que l'on a (prop. 7.2 et formules (5))

$$I(\varphi) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq I(\Phi).$$

On a donc les inégalités

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq I(\Phi) - I(\varphi) = I(\Phi - \varphi) < \varepsilon,$$

d'où la seconde condition de l'énoncé. Inversement, soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Par hypothèse, il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$  telle que  $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$ . D'après les formules (5), la condition 2 de l'énoncé du théorème 7.3 est alors réalisée avec les fonctions  $\Phi_{f,\sigma}$  et  $\varphi_{f,\sigma}$ , donc  $f$  est intégrable.

**Corollaire 7.3.** *Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .*

Démonstration : Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Considérons un nombre réel  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $g$  étant uniformément continue sur  $[a, b]$  (théorème de Heine), il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$  on ait

$$|x - y| < \alpha \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Soient  $n$  un entier naturel tel que

$$\frac{b - a}{n} < \alpha,$$

et  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  la subdivision de  $[a, b]$  définie par

$$x_k = a + k \frac{b - a}{n}.$$

Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n}.$$

Par ailleurs,  $g$  étant continue, elle est bornée sur  $[a, b]$  (th. 5.2). Notons  $M_k$  et  $m_k$  respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de  $g([x_{k-1}, x_k])$ . Il existe  $x$  et  $y$  dans  $[x_{k-1}, x_k]$  tels que l'on ait (*loc. cit.*)

$$g(x) = M_k \quad \text{et} \quad g(y) = m_k.$$

On a  $|x - y| \leq x_k - x_{k-1}$  d'où  $|x - y| < \alpha$ . Il résulte que l'on a

$$|g(x) - g(y)| = M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

On en déduit que

$$S(g, \sigma) - s(g, \sigma) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon,$$

ce qui établit le résultat (th. 7.4).

**Corollaire 7.4.** *Toute fonction monotone sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .*

Démonstration : Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone. Elle est bornée sur  $[a, b]$ . Compte tenu du théorème 7.3, si  $g$  est intégrable, il en est de même de  $-g$ . On peut donc supposer  $g$  croissante sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Soient  $n$  un entier naturel et  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  la subdivision de  $[a, b]$  définie par

$$x_k = a + k \frac{b - a}{n} \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , en désignant par  $m_k$  et  $M_k$  respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de  $g([x_{k-1}, x_k])$ , on a

$$m_k = g(x_{k-1}) \quad \text{et} \quad M_k = g(x_k).$$

Il en résulte que l'on a

$$S(g, \sigma) - s(g, \sigma) = \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) = \frac{(b - a)(g(b) - g(a))}{n}.$$

En choisissant  $n$  assez grand pour que l'on ait l'inégalité

$$\frac{(b - a)(g(b) - g(a))}{n} < \varepsilon,$$

on obtient  $S(g, \sigma) - s(g, \sigma) < \varepsilon$ , d'où l'assertion (th. 7.4).

**Théorème 7.5.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- 2) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux fonctions en escalier  $\psi$  et  $\theta$  sur  $[a, b]$  telles que l'on ait

$$|f(x) - \psi(x)| \leq \theta(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b] \quad \text{et} \quad I(\theta) < \varepsilon.$$

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Il existe deux fonctions  $\Phi \in \mathcal{E}^+(f)$  et  $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$  telles que  $I(\Phi - \varphi) < 2\varepsilon$  (th. 7.3). Posons

$$\psi = \frac{\Phi + \varphi}{2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\Phi - \varphi}{2}.$$

Les fonctions  $\psi$  et  $\theta$  sont en escalier sur  $[a, b]$  et l'on a  $I(\theta) < \varepsilon$ . Par ailleurs, on a les égalités

$$\Phi - \psi = \theta \quad \text{et} \quad \varphi - \psi = -\theta.$$

Pour tout  $x \in [a, b]$  on a donc

$$-\theta(x) = \varphi(x) - \psi(x) \leq f(x) - \psi(x) \leq \Phi(x) - \psi(x) = \theta(x),$$

d'où  $|f(x) - \psi(x)| \leq \theta(x)$ . Inversement, supposons la seconde condition satisfaite. Posons

$$\Phi = \theta + \psi \quad \text{et} \quad \varphi = \psi - \theta.$$

Ce sont deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$ . De plus,  $\Phi$  est dans  $\mathcal{E}^+(f)$  et  $\varphi$  est dans  $\mathcal{E}^-(f)$ . Les égalités

$$I(\Phi - \varphi) = I(2\theta) = 2I(\theta)$$

et le théorème 7.3 entraînent alors que  $f$  est intégrable.

**Théorème 7.6.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- 2) Il existe deux suites de fonctions en escalier  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[a, b]$  pour lesquelles :
  - (2.1) on a  $|f(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ .
  - (2.2) La suite  $(I(\theta_n))$  est convergente de limite nulle.

Dans ce cas, on a l'égalité

$$(6) \quad \int_a^b f = \lim I(\psi_n)$$

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $n$  un entier naturel. D'après le théorème 7.5, il existe deux fonctions en escalier  $\psi_n$  et  $\theta_n$  sur  $[a, b]$  telles que l'on ait

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b] \quad \text{et} \quad I(\theta_n) < \frac{1}{n+1},$$

ce qui entraîne la seconde condition. Inversement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait  $I(\theta_{n_0}) < \varepsilon$ . Les fonctions  $\psi_{n_0}$  et  $\theta_{n_0}$  satisfont alors la seconde condition de l'énoncé du théorème 7.5, donc  $f$  est intégrable.

Il reste à prouver la relation (6). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_n - \theta_n$  est dans  $\mathcal{E}^-(f)$  et  $\psi_n + \theta_n$  est dans  $\mathcal{E}^+(f)$ . Par suite, on a

$$I(\psi_n - \theta_n) \leq I^-(f) \quad \text{et} \quad I^+(f) \leq I(\psi_n + \theta_n).$$

Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , on a  $I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f$ , d'où les inégalités

$$I(\psi_n - \theta_n) \leq \int_a^b f \leq I(\psi_n + \theta_n).$$

On obtient

$$-I(\theta_n) \leq \int_a^b f - I(\psi_n) \leq I(\theta_n),$$

ce qui entraîne (6) vu que la suite  $(I(\theta_n))$  est convergente de limite nulle.

**Remarque 7.3.** On retrouve avec les théorèmes 7.1 et 7.6 l'implication

$$f \text{ continue sur } [a, b] \implies f \text{ intégrable sur } [a, b].$$

En effet, d'après le théorème 7.1, pour tout entier  $n \geq 0$  il existe une fonction en escalier  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'on ait

$$|f(x) - \psi_n(x)| < \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Les suites de fonctions en escalier  $(\psi_n)$  et  $(\theta_n)$ , où  $\theta_n(x) = \frac{1}{n+1}$  pour tout  $x \in [a, b]$ , vérifient la seconde condition du théorème 7.6, vu que l'on a  $I(\theta_n) = \frac{b-a}{n+1}$ , d'où l'assertion.

**Corollaire 7.5.** Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , il en est de même de la fonction  $|f|$ . Dans ce cas, on a

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable. Soient  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de fonctions en escalier sur  $[a, b]$  satisfaisant la seconde condition du théorème 7.6. Pour tout  $x \in [a, b]$  on a les inégalités

$$\left| |f|(x) - |\psi_n(x)| \right| \leq |f(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x).$$

Les suites  $(|\psi_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfont la seconde condition de ce théorème pour la fonction  $|f|$ , donc  $|f|$  est intégrable. Dans ce cas, on a alors (formule (6))

$$\int_a^b |f| = \lim I(|\psi_n|).$$

Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|I(\psi_n)| \leq I(|\psi_n|)$  (prop. 7.2). La suite  $(|I(\psi_n)|)$  étant convergente de limite  $|\int_a^b f|$ , cela entraîne l'inégalité annoncée.

**Exemple 7.6.** Considérons la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme suit. Si  $x$  est rationnel, on a  $x = \frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux et  $q \geq 1$ . On pose alors  $f(x) = \frac{1}{q}$ . Si  $x$  est irrationnel, on pose  $f(x) = 0$ . Elle est bornée sur  $[0, 1]$ . Démontrons qu'elle est intégrable sur  $[0, 1]$  et que l'on a

$$(7) \quad \int_0^1 f = 0.$$

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Soit  $A$  l'ensemble des éléments  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) \geq \varepsilon$ . C'est un ensemble fini. Soit  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\Phi(x) = f(x) \quad \text{si } x \in A \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \varepsilon \quad \text{si } x \text{ n'est pas dans } A.$$

Puisque  $A$  est fini,  $\Phi$  est une fonction en escalier et pour tout  $x \in [0, 1]$  on a

$$0 \leq f(x) \leq \Phi(x),$$

de sorte que la fonction nulle est dans  $\mathcal{E}^-(f)$  et  $\Phi$  est dans  $\mathcal{E}^+(f)$ . L'égalité

$$I(\Phi) = \varepsilon,$$

et le théorème 7.3 entraînent alors que  $f$  est intégrable sur  $[0, 1]$ . Par ailleurs, on a

$$0 \leq I^-(f) \quad \text{et} \quad I^+(f) \leq I(\Phi).$$

Puisque l'on a  $I^-(f) = I^+(f) = \int_0^1 f$ , on obtient

$$0 \leq \int_0^1 f \leq I(\Phi) = \varepsilon,$$

d'où l'égalité (7). La fonction  $f$  fournit un exemple d'une fonction positive et intégrable sur  $[0, 1]$ , d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ , telle que l'ensemble des points où elle ne s'annule pas soit dénombrable et dense dans  $[0, 1]$ .

**Proposition 7.3 (Relation de Chasles).** Soit  $c$  un point de  $]a, b[$ . La fonction  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si les restrictions de  $f$  à  $[a, c]$  et  $[c, b]$  sont intégrables respectivement sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Dans ce cas, on a

$$(8) \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarquons que dans l'égalité (8), on note encore  $f$  les restriction de  $f$  à  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . On fera implicitement cet abus de notation pour toute fonction sur  $[a, b]$ .

Démonstration : Supposons  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Il existe deux fonctions en escalier  $\varphi$  et  $\Phi$  sur  $[a, b]$  telles que l'on ait (th. 7.3)

$$\varphi \leq f \leq \Phi \quad \text{et} \quad I(\Phi - \varphi) < \varepsilon.$$

On a encore  $\varphi \leq f \leq \Phi$  par restriction à  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Par ailleurs, d'après la relation de Chasles démontrée pour les fonctions en escalier, on a

$$I(\Phi - \varphi) = I_{[a,b]}(\Phi - \varphi) = I_{[a,c]}(\Phi - \varphi) + I_{[c,b]}(\Phi - \varphi).$$

Les deux termes de cette somme étant positifs, on donc  $I_{[a,c]}(\Phi - \varphi) < \varepsilon$  et  $I_{[c,b]}(\Phi - \varphi) < \varepsilon$ , ce qui prouve que les restrictions de  $f$  à  $[a, c]$  et  $[c, b]$  sont intégrables.

Inversement, supposons  $f$  intégrable sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Il existe deux fonctions en escalier  $\varphi_1$  et  $\Phi_1$  sur  $[a, c]$  telles que l'on ait sur  $[a, c]$  (*loc. cit.*)

$$\varphi_1 \leq f \leq \Phi_1 \quad \text{et} \quad I_{[a,c]}(\Phi_1 - \varphi_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, Il existe deux fonctions en escalier  $\varphi_2$  et  $\Phi_2$  sur  $[c, b]$  telles que l'on ait sur  $[c, b]$

$$\varphi_2 \leq f \leq \Phi_2 \quad \text{et} \quad I_{[c,b]}(\Phi_2 - \varphi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction égale à  $\varphi_1$  sur  $[a, c]$  et  $\varphi_2$  sur  $[c, b]$ , et  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction égale à  $\Phi_1$  sur  $[a, c]$  et  $\Phi_2$  sur  $[c, b]$ . Ce sont deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  telles que  $\varphi \leq f \leq \Phi$ . Les fonctions  $\Phi - \varphi$  et  $\Phi_2 - \varphi_2$  coïncident sur  $[c, b]$  sauf peut-être au point  $c$ . On a donc (cf. remarques 7.3)

$$I_{[a,b]}(\Phi - \varphi) = I_{[a,c]}(\Phi_1 - \varphi_1) + I_{[c,b]}(\Phi_2 - \varphi_2) < \varepsilon,$$

ce qui prouve que  $f$  est intégrable.

Afin de prouver (8) utilisons le théorème 7.6. Il existe deux suites de fonctions en escalier  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[a, b]$  pour lesquelles on a

$$(9) \quad |f(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b],$$

la suite  $(I_{[a,b]}(\theta_n))$  étant convergente de limite nulle. On a alors

$$(10) \quad \int_a^b f = \lim I_{[a,b]}(\psi_n).$$

La condition (9) vaut aussi sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . De plus pour tout  $n$ ,  $\theta_n$  étant positive, on a

$$0 \leq I_{[a,c]}(\theta_n) \leq I_{[a,b]}(\theta_n) \quad \text{et} \quad 0 \leq I_{[c,b]}(\theta_n) \leq I_{[a,b]}(\theta_n),$$



ce qui prouve que les suites  $(I_{[a,c]}(\theta_n))$  et  $(I_{[c,b]}(\theta_n))$  sont convergentes de limite nulle. On en déduit que l'on a (th. 7.6)

$$(11) \quad \int_a^c f = \lim I_{[a,c]}(\psi_n) \quad \text{et} \quad \int_c^b f = \lim I_{[c,b]}(\psi_n).$$

L'égalité  $I_{[a,c]}(\psi_n) + I_{[c,b]}(\psi_n) = I_{[a,b]}(\psi_n)$  entraîne alors

$$\lim I_{[a,b]}(\psi_n) = \lim I_{[a,c]}(\psi_n) + \lim I_{[c,b]}(\psi_n),$$

ce qui, compte tenu de (10) et (11), établit la formule (8).

On a défini pour l'instant l'intégrale d'une fonction intégrable sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On peut généraliser cette définition en adoptant les conventions suivantes :

**Définition 7.10.** Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a \leq b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $[a, b]$ .

- 1) Si  $a = b$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $[a, a]$  et l'on pose  $\int_a^a f = 0$ .
- 2) Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , on pose

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Avec cette définition, on a la relation Chasles généralisée :

**Lemme 7.6.** Pour tous nombres réels  $a, b, c$ , si  $f$  est une fonction intégrable sur l'intervalle  $[\text{Min}(a, b, c), \text{Max}(a, b, c)]$ , alors  $f$  est intégrable sur chacun des intervalles fermés déterminés par  $a, b, c$ , et on a l'égalité

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration : D'après la proposition 7.3,  $f$  est intégrable sur chacun des intervalles fermés déterminés par  $a, b, c$ . Supposons  $a \leq b$ . On a alors trois cas à considérer. Si l'on a  $a \leq c \leq b$ , on obtient directement la formule annoncée (prop. 7.3). Si  $a \leq b \leq c$ , d'après le cas déjà traité, on a  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ , d'où l'égalité

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

De même, si l'on a  $c \leq a \leq b$ , alors  $\int_c^a f + \int_a^b f = \int_c^b f$ , ce qui conduit à

$$\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_c^b f + \int_a^c f,$$

d'où le résultat si  $a \leq b$ . Si l'on a  $b < a$ , compte tenu de ce qui précède, on a

$$\int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f,$$

ce qui, avec la définition 7.10, entraîne l'égalité annoncée.

## 5. Propriétés algébriques

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions définies sur  $[a, b]$ .

**Proposition 7.4.** *Supposons  $f$  et  $g$  intégrables sur  $[a, b]$ . Alors, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et l'on a*

$$(12) \quad \int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Démonstration : On remarque d'abord que la fonction  $\alpha f + \beta g$  est bornée sur  $[a, b]$ , car tel est le cas de  $f$  et  $g$  vu qu'elles y sont intégrables. Il existe un couple  $((\psi_n), (\theta_n))$  de suites de fonctions en escalier sur  $[a, b]$  tel que

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b],$$

et que la suite  $(I(\theta_n))$  converge vers 0 (th. 7.6). De même, il existe un couple analogue  $((\phi_n), (\gamma_n))$  pour  $g$  : on a

$$|g(x) - \phi_n(x)| \leq \gamma_n(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b],$$

et la suite  $(I(\gamma_n))$  converge vers 0. Pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\left| (\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha \psi_n + \beta \phi_n)(x) \right| \leq |\alpha| |f(x) - \psi_n(x)| + |\beta| |g(x) - \phi_n(x)| \leq |\alpha| \theta_n(x) + |\beta| \gamma_n(x).$$

Par ailleurs, l'égalité

$$I(|\alpha| \theta_n + |\beta| \gamma_n) = |\alpha| I(\theta_n) + |\beta| I(\gamma_n).$$

entraîne que la suite  $(I(|\alpha| \theta_n + |\beta| \gamma_n))$  est convergente de limite nulle. Le couple de fonctions en escalier  $(\alpha \psi_n + \beta \phi_n, |\alpha| \theta_n + |\beta| \gamma_n)$  satisfait la seconde condition du théorème 7.6 pour la fonction  $\alpha f + \beta g$ , ce qui prouve qu'elle est intégrable sur  $[a, b]$ . D'après la formule (6) on obtient

$$\int_a^b f = \lim I(\psi_n), \quad \int_a^b g = \lim I(\phi_n) \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f + \beta g = \lim I(\alpha \psi_n + \beta \phi_n).$$

Puisque l'on a

$$I(\alpha\psi_n + \beta\phi_n) = \alpha I(\psi_n) + \beta I(\phi_n),$$

cela entraîne (12).

**Corollaire 7.6.** *Supposons que  $f$  soit intégrable sur  $[a, b]$  et que l'ensemble des éléments  $x \in [a, b]$  tels que  $f(x) \neq g(x)$  soit fini. Alors,  $g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et l'on a*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Démonstration : La fonction  $g - f$  est en escalier, donc est intégrable sur  $[a, b]$ , et l'on a  $I(g - f) = 0$  (remarques 7.3). L'égalité  $g = (g - f) + f$  et la proposition 7.4 impliquent alors que  $g$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et que l'on a

$$\int_a^b g = \int_a^b (g - f) + \int_a^b f = \int_a^b f.$$

**Proposition 7.5.** *Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $[a, b]$ , il en est de même de la fonction  $fg$ .*

Démonstration : Les fonctions  $f$  et  $g$  sont bornées sur  $[a, b]$  donc  $fg$  aussi.

1) Supposons d'abord  $f$  et  $g$  positives sur  $[a, b]$  i.e.  $f(x)$  et  $g(x)$  sont positifs pour tout  $x \in [a, b]$ . Posons

$$M = \text{Max}(\text{Sup } f([a, b]), \text{Sup } g([a, b])).$$

On peut supposer  $M \neq 0$ , auquel cas on a  $M > 0$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . D'après le théorème 7.4, il existe des subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  de  $[a, b]$  telles que l'on ait

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad S(g, \tau) - s(g, \tau) < \frac{\varepsilon}{2M},$$

ce qui s'écrit aussi (formules (5))

$$(13) \quad I(\Phi_{f, \sigma} - \varphi_{f, \sigma}) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad I(\Phi_{g, \tau} - \varphi_{g, \tau}) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  étant supposées positives, pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\varphi_{f, \sigma}(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{g, \tau}(x) \geq 0.$$

En effet, posons  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ . On a  $\varphi_{f, \sigma}(x) = \text{Inf } f([x_{k-1}, x_k])$  pour  $x \in ]x_{k-1}, x_k[$  et 0 est un minorant de  $f([x_{k-1}, x_k])$ . De plus, on a  $\varphi_{f, \sigma}(x_k) = f(x_k) \geq 0$ , d'où les inégalités ci-dessus. Puisque l'on a

$$\varphi_{f, \sigma}(x) \leq f(x) \leq \Phi_{f, \sigma}(x) \quad \text{et} \quad \varphi_{g, \tau}(x) \leq f(x) \leq \Phi_{g, \tau}(x),$$

on en déduit que

$$(14) \quad (\varphi_{f,\sigma}\varphi_{g,\tau})(x) \leq (fg)(x) \leq (\Phi_{f,\sigma}\Phi_{g,\tau})(x).$$

Par ailleurs, on a les inégalités

$$\Phi_{f,\sigma}(x) \leq \text{Sup } f([a, b]) \quad \text{et} \quad \Phi_{g,\tau}(x) \leq \text{Sup } g([a, b]).$$

En effet, pour  $x \in ]x_{k-1}, x_k[$  on a  $\Phi_{f,\sigma}(x) = \text{Sup } f([x_{k-1}, x_k]) \leq \text{Sup } f([a, b])$  et l'on a  $\Phi_{f,\sigma}(x_k) = f(x_k)$ . De l'égalité,

$$(\Phi_{f,\sigma}\Phi_{g,\tau})(x) - (\varphi_{f,\sigma}\varphi_{g,\tau})(x) = \Phi_{g,\tau}(x)(\Phi_{f,\sigma}(x) - \varphi_{f,\sigma}(x)) + \varphi_{f,\sigma}(x)(\Phi_{g,\tau}(x) - \varphi_{g,\tau}(x)),$$

on déduit alors que

$$(\Phi_{f,\sigma}\Phi_{g,\tau})(x) - (\varphi_{f,\sigma}\varphi_{g,\tau})(x) \leq M \left( (\Phi_{f,\sigma}(x) - \varphi_{f,\sigma}(x)) + (\Phi_{g,\tau}(x) - \varphi_{g,\tau}(x)) \right).$$

Il résulte alors de (13) et de la proposition 7.2 que l'on a

$$(15) \quad I(\Phi_{f,\sigma}\Phi_{g,\tau} - \varphi_{f,\sigma}\varphi_{g,\tau}) < \varepsilon.$$

Les conditions (14), (15) et le théorème 7.3 entraînent le résultat dans ce cas.

2) Supposons maintenant  $f$  et  $g$  quelconques. On a l'égalité fonctionnelle

$$\begin{aligned} fg &= \left( f - \text{Inf } f([a, b]) \right) \left( g - \text{Inf } g([a, b]) \right) + \text{Inf } f([a, b])g + \text{Inf } g([a, b])f \\ &\quad - \text{Inf } f([a, b]) \text{Inf } g([a, b]). \end{aligned}$$

Les fonctions  $f - \text{Inf } f([a, b])$  et  $g - \text{Inf } g([a, b])$  sont positives et intégrables sur  $[a, b]$ . D'après le premier alinéa il en est de même de leur produit. Il en résulte que  $fg$  est intégrable comme somme de fonctions intégrables (prop. 7.4), d'où le résultat.

**Remarque 7.4.** Il est faux en général que la composée de deux fonctions intégrables soit intégrable. En effet, considérons la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  définie dans l'exemple 7.6 et  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(0) = 0$  et  $g(x) = 1$  si  $0 < x \leq 1$ . On a vu que  $f$  est intégrable sur  $[0, 1]$  (exemple 7.6) et il en est de même de  $g$  (c'est une fonction en escalier). Vérifions que  $g \circ f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ . On a

$$g \circ f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Par suite,  $g \circ f$  coïncide avec la fonction caractéristique des rationnels sur  $[0, 1]$ , dont on a démontré qu'elle n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ .

## 6. Ordre fonctionnel - Formule de la moyenne - Inégalité de Schwarz

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions définies sur  $[a, b]$ . Rappelons que par définition, on a  $f \geq g$  si pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $f(x) \geq g(x)$ . Dire que  $f$  est positive signifie que l'on a  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

**Proposition 7.6.** *Supposons  $f \geq g$  et  $f, g$  intégrables sur  $[a, b]$ . Alors on a*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Démonstration : Posons  $h = f - g$ . La fonction nulle minore  $h$  donc 0 appartient à  $\mathcal{I}^-(h)$ . L'intégrale inférieure de  $h$  est un majorant de  $\mathcal{I}^-(h)$  et  $h$  est intégrable sur  $[a, b]$ . On a donc

$$0 \leq I^-(h) = \int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g,$$

d'où l'assertion.

**Proposition 7.7.** *Supposons  $f$  continue positive sur  $[a, b]$ , et qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que l'on ait  $f(c) > 0$ . Alors on a*

$$\int_a^b f > 0.$$

Démonstration : Puisque  $f$  est continue au point  $c$  et que  $f(c) > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$  on ait

$$|x - c| \leq \alpha \implies |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}.$$

Pour tout  $x \in [a, b]$  tel que  $|x - c| \leq \alpha$  on a donc  $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ . Posons

$$[u, v] = [a, b] \cap [c - \alpha, c + \alpha].$$

On a  $u < v$  (car  $\alpha > 0$ ) et  $f$  étant positive sur  $[a, b]$  on a (prop. 7.3 et 7.6)

$$\int_a^b f \geq \int_u^v f.$$

Puisque  $f$  est plus grande que la fonction constante égale à  $\frac{f(c)}{2}$  sur  $[u, v]$ , il en résulte que l'on a (prop. 7.6 et exemples 7.3)

$$\int_u^v f \geq (v - u) \frac{f(c)}{2} > 0,$$

d'où le résultat.

**Remarques 7.5.**

1) L'assertion de la proposition 7.7 est fausse si l'on suppose seulement  $f$  intégrable sur  $[a, b]$  et pas continue, comme le montre l'exemple 7.6.

2) La proposition 7.7 signifie que si une fonction continue positive est d'intégrale nulle sur  $[a, b]$ , alors cette fonction est nulle sur  $[a, b]$ .

**Proposition 7.8.** *Supposons  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Soient  $m$  et  $M$  respectivement un minorant et un majorant de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors on a*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Démonstration : On a les inégalités fonctionnelles  $m \leq f \leq M$ , dans lesquelles on note encore  $m$  et  $M$  les fonctions constantes de valeurs  $m$  et  $M$  sur  $[a, b]$ . On obtient

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M.$$

Les égalités  $\int_a^b m = m(b-a)$  et  $\int_a^b M = M(b-a)$  entraînent le résultat.

**Définition 7.11.** *Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , le nombre réel*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

*s'appelle la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ .*

**Proposition 7.9 (Formule de la moyenne).** *Supposons  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Il existe  $c \in [a, b]$  tel que l'on ait*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Démonstration : On a (prop. 7.8)

$$\inf f([a, b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \sup f([a, b]).$$

La fonction  $f$  étant continue sur  $[a, b]$ , elle prend toutes les valeurs comprises entre ses bornes, d'où l'assertion.

**Proposition 7.10 (Inégalité de Schwarz).** *Supposons  $f$  et  $g$  intégrables sur  $[a, b]$ . Alors,  $f^2$ ,  $g^2$  et  $fg$  le sont aussi et l'on a*

$$(16) \quad \left( \int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2.$$

De plus, si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$ , l'égalité a lieu si et seulement si  $f$  et  $g$  sont colinéaires.

Démonstration : Les fonctions  $f^2$ ,  $g^2$ ,  $fg$  et  $(f + \lambda g)^2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sont intégrables (prop. 7.5). Considérons la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  par

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b (f + \lambda g)^2.$$

On a (prop. 7.6)

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2 \geq 0.$$

Distinguons deux cas. Si  $\int_a^b g^2 = 0$ , puisque  $\varphi(\lambda)$  est positif, on doit avoir  $\int_a^b fg = 0$ , d'où l'inégalité (16) dans ce cas. Supposons  $\int_a^b g^2 \neq 0$ . Le trinôme  $\varphi(\lambda)$  est alors du second degré en  $\lambda$ . Étant de signe constant, son discriminant doit être négatif, ce qui se traduit par la condition (16).

Si  $f$  et  $g$  sont colinéaires, l'inégalité (16) est une égalité. Supposons alors  $f$  et  $g$  continues sur  $[a, b]$  et que (16) soit une égalité. Si  $\int_a^b g^2 = 0$ , parce que  $g^2$  est continue et positive, on a  $g^2 = 0$  (prop. 7.7) d'où  $g = 0$ , qui est colinéaire à  $f$ . Supposons  $\int_a^b g^2 \neq 0$ . Le discriminant de  $\varphi(\lambda)$  étant nul, il existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(\lambda_0) = 0$ . On a donc  $\int_a^b (f + \lambda_0 g)^2 = 0$ . La fonction  $(f + \lambda_0 g)^2$  étant continue positive, elle est nulle, d'où  $f = -\lambda_0 g$  et le résultat.

## 7. Sommes de Riemann

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $[a, b]$ .

**Définition 7.12.** On appelle subdivision pointée de  $[a, b]$ , tout couple  $(\sigma, \zeta)$  où

$$\sigma = (x_0, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \zeta = (\zeta_k)_{1 \leq k \leq n}$$

sont respectivement une subdivision de  $[a, b]$  et une famille de points de  $[a, b]$  telles que  $\zeta_k$  appartienne à  $[x_{k-1}, x_k]$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

Avec les notations de cette définition :

**Définition 7.13.** On appelle somme de Riemann de  $f$  relative à la subdivision pointée  $(\sigma, \zeta)$ , le nombre réel

$$S(f, \sigma, \zeta) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Si  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ , on a

$$I(\varphi_{f, \sigma}) \leq S(f, \sigma, \zeta) \leq I(\Phi_{f, \sigma}).$$

Rappelons que si  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  est une subdivision de  $[a, b]$ , on note  $h(\sigma)$  son pas i.e. le maximum des  $x_k - x_{k-1}$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

**Théorème 7.7.** *Supposons  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $(\sigma, \zeta)$  de  $[a, b]$ , on ait l'implication*

$$(17) \quad h(\sigma) < \alpha \implies \left| \int_a^b f - S(f, \sigma, \zeta) \right| < \varepsilon.$$

Démonstration : Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . La fonction  $f$  étant uniformément continue sur  $[a, b]$  (théorème de Heine), il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$  on ait

$$|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Soit  $(\sigma, \zeta)$  une subdivision pointée de  $[a, b]$  telle que  $h(\sigma) < \alpha$ . Posons  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  et  $\zeta = (\zeta_k)_{1 \leq k \leq n}$ . Vu que  $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$  et que  $|x_k - x_{k-1}| < \alpha$ , pour tout  $x \in [x_{k-1}, x_k]$  on a  $|x - \zeta_k| < \alpha$ , d'où

$$|f(x) - f(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{i.e.} \quad f(\zeta_k) - \frac{\varepsilon}{b - a} < f(x) < f(\zeta_k) + \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Il en résulte que l'on a

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( f(\zeta_k) - \frac{\varepsilon}{b - a} \right) \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( f(\zeta_k) + \frac{\varepsilon}{b - a} \right),$$

autrement dit,

$$(x_k - x_{k-1}) \left( f(\zeta_k) - \frac{\varepsilon}{b - a} \right) \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq (x_k - x_{k-1}) \left( f(\zeta_k) + \frac{\varepsilon}{b - a} \right).$$

En sommant ces inégalités pour  $k$  entre 1 et  $n$ , on obtient avec la relation de Chasles

$$S(f, \sigma, \zeta) - \varepsilon \leq \int_a^b f \leq S(f, \sigma, \zeta) + \varepsilon,$$

d'où le résultat.

**Remarque 7.6.** Le théorème 7.7 est aussi valable pour les fonctions intégrables générales pas nécessairement continues. C'est même, en un sens précis, une caractérisation des fonctions intégrables. Nous admettrons ici ce résultat (théorème de Riemann).

**Corollaire 7.7.** *Supposons  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Soit  $(\sigma_n, \zeta_n)$  une suite de subdivisions pointées de  $[a, b]$  telle que la suite  $(h(\sigma_n))$  soit convergente de limite nulle. Alors, la suite  $(S(f, \sigma_n, \zeta_n))$  est convergente et l'on a*

$$\lim S(f, \sigma_n, \zeta_n) = \int_a^b f.$$



Démonstration : Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Soit  $\alpha > 0$  un nombre réel pour lequel la condition (17) soit satisfaite. Puisque la suite  $(h(\sigma_n))$  converge vers 0, il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait  $h(\sigma_n) < \alpha$  pour tout  $n \geq n_0$ . On obtient d'après (17)

$$\left| \int_a^b f - S(f, \sigma_n, \zeta_n) \right| < \varepsilon$$

dès que  $n \geq n_0$ , d'où l'assertion.

En décomposant  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $I_1, \dots, I_n$  de même longueur, et en choisissant pour chaque  $k$  un élément  $\zeta_k$  de  $I_k$ , on a donc d'après le corollaire 7.7,

$$(18) \quad \lim \frac{f(\zeta_1) + \dots + f(\zeta_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f,$$

ce qui justifie la définition de la valeur moyenne d'une fonction continue. D'après la remarque 7.6, cela vaut aussi pour une fonction intégrable générale. En explicitant (18) dans un cas particulier, on obtient :

**Corollaire 7.8.** *Supposons  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

*Alors,  $(u_n)$  est convergente vers la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ , autrement dit, on a*

$$\lim u_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Démonstration : On applique le corollaire 7.7 avec la suite de subdivisions pointées  $(\sigma_n, \zeta_n)$  où  $\sigma_n = (x_0, \dots, x_n)$  avec  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ , et où  $\zeta_n = (\zeta_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$  avec  $\zeta_{n,k} = x_k$ . On a  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ , donc la suite  $(h(\sigma_n))$  tend vers 0 et pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$S(f, \sigma_n, \zeta_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

d'où l'assertion.

**Remarque 7.7.** D'après ce corollaire, si  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

est aussi convergente de limite la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$ . On le constate en remarquant que l'on a  $u_n - v_n = \frac{f(b)-f(a)}{n}$ .

## 8. Intégrales et primitives

On va démontrer dans ce paragraphe ce que l'on appelle parfois le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (théorème 7.9), qui explique le lien entre la notion d'intégrale et celle de primitive.

Soient  $I$  un intervalle infini de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$ .

**Définition 7.14.** On appelle primitive de  $f$  sur  $I$ , toute fonction  $F$  définie et dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

### Exemples 7.7.

- 1) La fonction sinus est une primitive de la fonction cosinus sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) La fonction logarithme est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 3) La fonction arc tangente est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) La fonction arc sinus est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur  $] -1, 1[$ .

**Lemme 7.7.** Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Une fonction  $G$  définie sur  $I$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait  $F(x) = G(x) + \lambda$  pour tout  $x \in I$ . En particulier, si  $f$  a une primitive sur  $I$ , alors elle en a une infinité.

Démonstration : Si  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , on a  $G' = F' = f$ . La fonction  $F - G$  est donc dérivable sur  $I$  et sa fonction dérivée est nulle. Par suite,  $F - G$  est constante sur  $I$  (cor. 6.4). Inversement, si  $F - G$  est constante sur  $I$ , alors  $G$  est dérivable sur  $I$ , et l'on a  $F' = G'$ , donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Définition 7.15.** On dit que  $f$  est localement intégrable sur  $I$  si pour tous  $x$  et  $y$  dans  $I$  avec  $x < y$ ,  $f$  est intégrable sur  $[x, y]$ .

**Exemples 7.8.** Les fonctions continues sur  $I$  sont localement intégrables sur  $I$  (cor. 7.3). Il en est de même des fonctions monotones sur  $I$  (cor. 7.4).

**Définition 7.16.** Supposons  $f$  localement intégrable sur  $I$ . Soit  $a$  un point fixé de  $I$ . On appelle fonction intégrale associée à  $f$  et  $a$ , la fonction  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(19) \quad \Phi(x) = \int_a^x f \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Compte tenu de la définition 7.10, le second membre de (19) a un sens que  $x$  soit ou non plus grand que  $a$ , et l'on a  $\Phi(a) = 0$ .

**Exemple 7.9.** Prenons  $I = [0, 2]$  et pour  $f$  la fonction partie entière sur  $I$ . Elle est en escalier sur  $I$ , donc est en particulier localement intégrable sur  $I$ . Soit  $\Phi$  la fonction intégrale associée à  $f$  et 0. Vérifions que l'on a

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \Phi(x) = x - 1 \quad \text{si} \quad x \in [1, 2].$$

La fonction  $f$  est nulle sur  $[0, 1[$ . On a donc  $\Phi(1) = 0$  (remarques 7.3) et pour tout  $x \in [0, 1[$  on a  $\Phi(x) = 0$ . Par ailleurs, pour tout  $x \in [1, 2[$  on a

$$\Phi(x) = \int_0^1 f + \int_1^x f = \Phi(1) + \int_1^x f = \int_1^x f.$$

Puisque  $f$  est constante égale à 1 sur  $[1, x]$ , on a  $\int_1^x f = x - 1$ , et cette égalité est aussi valable si  $x = 2$  (*loc. cit.*), d'où l'assertion.

On constate dans l'exemple précédent que la fonction  $\Phi$  est continue sur  $I$ . Cela vaut en toute généralité :

**Proposition 7.11.** *Supposons  $f$  localement intégrable sur  $I$ . Soient  $a$  un point fixé de  $I$  et  $\Phi$  la fonction intégrale associée à  $f$  et  $a$ . Alors,  $\Phi$  est uniformément continue sur tout intervalle fermé borné contenu dans  $I$ . En particulier,  $\Phi$  est continue sur  $I$ .*

Démonstration : Soient  $u$  et  $v$  des points de  $I$  tels que  $u < v$ . Soit  $M$  la borne supérieure de  $|f|$  sur  $[u, v]$  (qui existe car  $f$  et donc  $|f|$  est intégrable sur  $[u, v]$ ). Il suffit de vérifier que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[u, v]$ , on a

$$(20) \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq M|x - y|.$$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[u, v]$  tels que  $x > y$  (cela n'est pas restrictif). On a

$$\Phi(x) - \Phi(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_a^x f + \int_y^a f = \int_y^x f.$$

On en déduit l'inégalité (cor. 7.5)

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \int_y^x |f|.$$

La proposition 7.8 implique alors

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq N|x - y|$$

où  $N$  est la borne supérieure de  $|f|$  sur  $[y, x]$ . Puisque  $[y, x]$  est contenu dans  $[u, v]$  on a  $N \leq M$ , d'où l'inégalité (20) et le résultat.

Précisons la proposition 7.11 si  $f$  est continue sur  $I$ , en démontrant dans ce cas l'existence d'une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Théorème 7.8.** *Supposons  $f$  continue sur  $I$ . Soient  $a$  un point de  $I$  fixé et  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction intégrale associée à  $f$  et  $a$ . Alors,  $\Phi$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $\Phi$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .*

Démonstration : Soit  $x_0$  un point de  $I$ . Il s'agit de prouver que  $\Phi$  est dérivable en  $x_0$  et que l'on a  $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ . Soit  $x$  un point de  $I$  distinct de  $x_0$ . Posons

$$\Delta_{x_0}\Phi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}.$$

On a l'égalité

$$\Delta_{x_0}\Phi(x) - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \left( \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0)(x - x_0) \right),$$

autrement dit,

$$\Delta_{x_0}\Phi(x) - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \left( \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right).$$

On a donc

$$|\Delta_{x_0}\Phi(x) - f(x_0)| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right|.$$

Posons  $u = \text{Min}(x, x_0)$  et  $v = \text{Max}(x, x_0)$ . On a (déf. 7.10)

$$\left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| = \left| \int_u^v (f(t) - f(x_0)) dt \right|.$$

D'après le corollaire 7.5, on obtient l'inégalité

$$(21) \quad |\Delta_{x_0}\Phi(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_u^v |f(t) - f(x_0)| dt.$$

Soit alors  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Puisque  $f$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que l'on ait l'implication

$$t \in I \text{ et } |t - x_0| < \alpha \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Supposons que  $x$  appartienne à l'intervalle  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ . Dans ce cas  $[u, v]$  est contenu dans  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  et l'on a

$$\int_u^v |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_u^v \varepsilon dt = \varepsilon(v - u) = \varepsilon|x - x_0|.$$

On déduit alors de (21) que l'on a

$$x \in I \text{ et } 0 < |x - x_0| < \alpha \implies |\Delta_{x_0}\Phi(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

La limite de  $\Delta_{x_0}\Phi(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ , par valeurs distinctes de  $x_0$ , est donc  $f(x_0)$ , ce qui établit notre assertion.

**Corollaire 7.9.** *Supposons  $f$  continue sur  $I$ . Soit  $a$  un point de  $I$ . L'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$  est formé des fonctions qui à  $x \in I$  associe  $\int_a^x f + \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

On en arrive au théorème fondamental annoncé.

**Théorème 7.9.** *Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . On a l'égalité*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Démonstration : D'après le corollaire 7.9, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que l'on ait

$$F(x) = \int_a^x f + \lambda \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On a  $F(a) = \lambda$ , d'où

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f \quad \text{pour tout } x \in [a, b],$$

et le résultat avec  $x = b$ .

En conséquence, on peut utiliser le calcul des primitives pour calculer des intégrales de fonctions continues.

### Remarques 7.8.

1) Il existe des fonctions intégrables sur  $[a, b]$  qui ne possèdent pas de primitives sur cet intervalle. Il en est ainsi de la fonction définie sur  $[0, 1]$  intervenant dans l'exemple 7.6. Pour le vérifier, on peut utiliser le fait (que l'on n'a pas démontré) que toute fonction dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires. Si la fonction considérée possédait une primitive sur  $[0, 1]$ , elle devrait donc satisfaire cette propriété. Or ce n'est pas le cas, car par exemple elle prend les valeurs 0 et 1, et tout nombre irrationnel entre 0 et 1 n'est pas dans son image.

Cela étant, dans le cas où une fonction intégrable  $f$  sur  $[a, b]$  possède une primitive  $F$ , on peut démontrer que l'on a encore la formule

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

2) Donnons ici l'exemple d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui possède une primitive sur  $[a, b]$ , mais qui n'est pas intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x}{\operatorname{Log} x} \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

Elle est dérivable en 0, car pour tout  $x \in ]0, 1]$  on a

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} \right| = \left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{\operatorname{Log} x} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Log} x|},$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 0.$$

Par suite,  $g$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et l'on a  $g'(0) = 0$ . Posons

$$f = g',$$

et vérifions que  $f$  réalise la condition souhaitée. Par définition,  $f$  possède  $g$  comme primitive sur  $[0, 1]$ . Il s'agit de montrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ . On va prouver pour cela qu'elle n'est pas bornée sur  $[0, 1]$ . Soit  $x$  un élément de  $[0, 1]$ . On a

$$f(x) = \frac{\operatorname{Log} x \left( \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right) - \cos \frac{1}{x}}{(\operatorname{Log} x)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

On a les égalités

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\operatorname{Log} x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos \frac{1}{x}}{(\operatorname{Log} x)^2} = 0.$$

Posons alors pour  $x \neq 0$

$$h(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x \operatorname{Log} x}.$$

La suite de terme général

$$h\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = -\frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$$

tend vers  $-\infty$  (\*). Il en résulte que l'on a

$$\lim f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = -\infty,$$

en particulier,  $f$  n'est pas bornée au voisinage de 0, d'où l'assertion.

Justifions l'affirmation (\*). Il suffit pour cela de prouver l'énoncé suivant :

**Lemme 7.8.** On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0.$$

Démonstration : Soit  $x$  un nombre réel  $> 1$ . D'après le théorème 7.9, on a

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Par ailleurs, pour tout  $t \geq 1$  on a  $1 \leq \sqrt{t} \leq t$ , d'où l'on déduit que

$$0 < \text{Log } x \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1).$$

Par suite, on a

$$0 < \frac{\text{Log } x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}},$$

ce qui entraîne le lemme.

**Notation.** Étant donnée une fonction  $f$  définie dans un intervalle, pour désigner une de ses primitives  $F$ , s'il en existe, on note souvent

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

sans préciser les limites d'intégration. Par exemple, si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle, on écrit que l'on a

$$f(x) = \int f'(x) dx.$$

On a ainsi les relations

$$e^x = \int e^x dx, \quad \text{Arctg } x = \int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \text{Log } x = \int \frac{dx}{x}, \quad \sin x = \int \cos x dx, \quad \text{etc.}$$

**Exemples 7.10.**

1) On vérifie que l'on a

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg } 1 - \text{Arctg } 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ , on a

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \text{Log } b - \text{Log } a \quad \text{et} \quad \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \quad \text{pour } r \in \mathbb{Q}, r \neq -1.$$

2) De même, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{Log } 2.$$

On en déduit que la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

est convergente de limite  $\text{Log } 2$ . En effet, considérons la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Elle est continue sur  $[0, 1]$ . Par ailleurs, on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

La suite  $(u_n)$  est donc convergente de limite la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0, 1]$  (cor. 7.8), qui est précisément  $\text{Log } 2$ .

## 9. Intégration par parties

On se limitera au cas des fonctions de classe  $C^1$ .

**Théorème 7.10.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Les fonctions  $fg'$  et  $f'g$  sont intégrables sur  $[a, b]$ , et l'on a l'égalité

$$(22) \quad \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Démonstration : Les fonctions  $f$  et  $g$  étant de classe  $C^1$ , les fonctions dérivées  $f'$  et  $g'$  sont continues donc intégrables sur  $[a, b]$ . Par suite,  $fg'$  et  $f'g$  sont intégrables sur  $[a, b]$  (prop. 7.5). Posons  $h = f'g + fg'$ . La fonction  $fg$  est une primitive de  $h$  sur  $[a, b]$  et  $h$  est continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème 7.9, on a donc

$$\int_a^b h = (fg)(b) - (fg)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

d'où la formule (22) (prop. 7.4).

Cette formule permet de calculer une quantité massive d'intégrales. On l'écrit aussi

$$(23) \quad \int_a^b f(x)g'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$



Avec la notation utilisée pour désigner des primitives, en exprimant le fait que  $fg$  est une primitive de  $f'g + fg'$ , on a

$$(24) \quad \int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx.$$

### Exemples 7.11.

1) On a

$$\int \operatorname{Log} x \, dx = x \operatorname{Log} x - x,$$

comme on le constate en utilisant la formule (24) avec  $f(x) = \operatorname{Log} x$  et  $g(x) = x$ . Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a < b$ , on a donc l'égalité (th. 7.9)

$$\int_a^b \operatorname{Log} x \, dx = (b \operatorname{Log} b - b) - (a \operatorname{Log} a - a).$$

2) (**Intégrale et formule de Wallis**) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Vérifions que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  on a

$$(25) \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

On établit pour cela, en utilisant le théorème 7.10, une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ . En posant

$$f(x) = -\cos x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin^{n+1} x,$$

on a  $f'(x) = \sin x$  et  $g'(x) = (n+1) \sin^n x \cos x$ , et l'on obtient avec la formule (23)

$$I_{n+2} = [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \, dx.$$

Compte tenu de l'égalité  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , on en déduit la relation

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Par ailleurs, on a

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1,$$

de sorte que les formules (25) sont vraies pour  $p = 0$  (on a  $0! = 1$  par définition). Par récurrence, on les déduit alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

À partir de ce qui précède on obtient la formule de Wallis, à savoir que l'on a

$$(26) \quad \lim \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2}{(2n)^2(2n-2)^2 \cdots 2^2} = \frac{2}{\pi}.$$

En effet, pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $0 \leq \sin x \leq 1$ , d'où  $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ , puis (prop. 7.6)

$$I_{n+1} \leq I_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, on a

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

autrement dit, vu que  $I_n$  est positif pour tout  $n$ , on a

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n},$$

donc la suite  $\left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right)$  est convergente de limite 1. En écrivant que l'on a

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k}\right) \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1}\right),$$

on obtient pour tout  $n \geq 1$ , l'égalité

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)^2 \cdots 3^2}{(2n)^2(2n-2)^2 \cdots 2^2} \frac{\pi}{2},$$

ce qui implique (26).

3) Posons

$$u_n = \frac{1}{n^3} \left( \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n} \right),$$

et vérifions que l'on a

$$(27) \quad \lim u_n = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$

On écrit pour cela que l'on a

$$u_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n} \right),$$

par suite, on a (cor. 7.8)

$$\lim u_n = \int_0^1 x^2 \sin \pi x \, dx.$$

On applique alors la formule (23) avec les fonctions

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{\cos \pi x}{\pi}.$$

On a  $f'(x) = 2x$  et  $g'(x) = \sin \pi x$ , d'où

$$\int_0^1 x^2 \sin \pi x \, dx = \left[ -\frac{x^2 \cos \pi x}{\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos \pi x \, dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos \pi x \, dx.$$

En effectuant de nouveau une intégration par parties avec les fonctions

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

on déduit que l'on a

$$\int_0^1 x \cos \pi x \, dx = -\frac{2}{\pi^2},$$

et l'égalité (27).

4) Déterminons la primitive de la fonction arc sinus sur  $[-1, 1]$  qui vaut 1 en 0. La fonction Arcsin est continue sur  $[-1, 1]$ . L'ensemble des ses primitives est formé des fonctions sur  $[-1, 1]$  qui à  $x$  associe  $\int_0^x \text{Arcsin} + \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  (cor. 7.9). La primitive cherchée est donc la fonction  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x) = 1 + \int_0^x \text{Arcsin}.$$

Déterminons  $F$  sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ . On utilise le théorème d'intégration par parties avec  $f(x) = \text{Arcsin } x$  et  $g(x) = x$ . On obtient pour tout  $x \in ] -1, 1[$  l'égalité

$$\int_0^x \text{Arcsin } t \, dt = x \text{Arcsin } x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Une primitive de la fonction  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  est la fonction  $t \mapsto -\sqrt{1-t^2}$ . Par suite, on a

$$F(x) = x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour tout } x \in ] -1, 1[.$$

Soit  $G : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$G(x) = x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Les fonctions  $F$  et  $G$  sont continues en 1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ , tel que l'on ait

$$|F(x) - F(1)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |G(x) - G(1)| < \varepsilon,$$

dès que  $x \in ]1 - \alpha, 1]$ . Soit  $x$  un élément de  $]1 - \alpha, 1]$  autre que 1. On a  $F(x) = G(x)$ , d'où l'inégalité

$$|F(1) - G(1)| < 2\varepsilon,$$

puis  $F(1) = G(1)$ . De même, on montre que  $F(-1) = G(-1)$ . On a donc  $F = G$ .

5) (**Théorème de Lambert**) On va démontrer que les puissances non nulles de  $e = \exp(1)$  sont irrationnelles. Ce résultat est dû à Lambert (1761). Plus précisément :

**Théorème 7.11.** *Pour tout nombre rationnel  $r$  non nul,  $e^r$  est irrationnel.*

Démonstration : On a déjà prouvé que  $e$  est irrationnel. L'idée est ici la même, on procède par l'absurde en construisant une suite d'entiers strictement positifs qui est convergente de limite nulle. Tout d'abord, on peut supposer que  $r$  est un entier naturel. En effet, compte tenu de la relation  $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$ , on peut supposer  $r$  positif, de plus étant donnés  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p \neq 0$ , si  $e^{\frac{p}{q}}$  était rationnel, il en serait de même de  $(e^{\frac{p}{q}})^q = e^p$ .

Considérons donc un entier naturel non nul  $r$  et supposons qu'il existe des entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait

$$e^r = \frac{a}{b}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons

$$u_n = r^{2n+1} b \int_0^1 e^{rx} P_n(x) \, dx \quad \text{où} \quad P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

La fonction définie sur  $[0, 1]$  qui à  $x$  associe  $e^{rx} P_n(x)$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ , et n'est pas identiquement nulle (par exemple  $e^{\frac{r}{2}} P(\frac{1}{2}) \neq 0$ ). D'après la proposition 7.7 on en déduit que l'on a

$$(28) \quad u_n > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs, pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $x^n(1-x)^n \leq 1$  et  $e^{rx} \leq e^r$ , d'où il résulte l'inégalité

$$u_n \leq b e^r \frac{r^{2n+1}}{n!}.$$

La suite  $\left(\frac{r^{2n+1}}{n!}\right)$  étant convergente de limite nulle, on a donc d'après (28)

$$(29) \quad \lim u_n = 0$$

Afin de démontrer le résultat, il reste à prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est un entier naturel. Pour tout  $N$ , après  $N$  intégrations par parties successives on obtient l'égalité

$$(30) \quad \int_0^1 P_n(x) e^{rx} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{r^{k+1}} \left[ P_n^{(k)}(x) e^{rx} \right]_0^1 + \frac{(-1)^N}{r^N} \int_0^1 P_n^{(N)}(x) e^{rx} dx.$$

En effet, cette formule est vraie si  $N = 0$  (une somme vide est nulle par définition). Supposons qu'elle le soit pour un entier  $N \geq 0$ . La formule (23) utilisée avec

$$f(x) = P_n^{(N)}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{rx}}{r},$$

entraîne qu'elle l'est encore pour l'entier  $N + 1$ . Puisque 0 et 1 sont des racines d'ordre de multiplicité  $n$  de  $P_n$ , la somme intervenant dans le membre de droite de (30) est nulle pour tout  $N$  tel que  $N - 1 \leq n - 1$ . Ainsi avec  $N = 2n$ , on obtient

$$(31) \quad \int_0^1 P_n(x) e^{rx} dx = \sum_{k=n}^{2n} \frac{(-1)^k}{r^{k+1}} \left[ P_n^{(k)}(x) e^{rx} \right]_0^1 + \frac{1}{r^{2n}} \int_0^1 P_n^{(2n)}(x) e^{rx} dx.$$

Par ailleurs, il existe des entiers  $a_k \in \mathbb{Z}$  tels que pour tout  $x \in [0, 1]$  on ait

$$x^n(1-x)^n = \sum_{k=n}^{2n} a_k x^k.$$

Pour  $k = n, \dots, 2n$ , on a alors

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} a_k.$$

En particulier,

$$P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour } k = n, \dots, 2n.$$

Puisque  $P_n(1-x) = P_n(x)$ , on a la relation

$$P_n^{(k)}(x) = (-1)^k P_n^{(k)}(1-x),$$

de sorte que l'on a aussi

$$P_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour } k = n, \dots, 2n.$$

Il en résulte que

$$(32) \quad (r^{2n+1}b) \sum_{k=n}^{2n} \frac{(-1)^k}{r^{k+1}} \left[ P_n^{(k)}(x) e^{rx} \right]_0^1 \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$P_n^{(2n)}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

On en déduit les égalités

$$\frac{1}{r^{2n}} \int_0^1 P_n^{(2n)}(x) e^{rx} dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{r^{2n} n!} \int_0^1 e^{rx} dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{r^{2n+1} n!} (e^r - 1).$$

Par suite, on a

$$(r^{2n+1}b) \frac{1}{r^{2n}} \int_0^1 P_n^{(2n)}(x) e^{rx} dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} (a - b) \in \mathbb{Z}.$$

Compte tenu de (31) et (32), cela établit le fait que  $u_n$  soit un entier, d'où le résultat.

Comme conséquence de ce théorème :

**Corollaire 7.10.** *Pour tout nombre rationnel  $r > 0$ , distinct de 1,  $\text{Log } r$  est irrationnel.*

Démonstration : Supposons  $\text{Log } r = \frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  non nul et  $b \in \mathbb{N}$ . On a

$$r = e^{\text{Log } r} = e^{\frac{a}{b}},$$

d'où une contradiction.

**Remarque 7.9.** On peut en fait démontrer que pour tout nombre rationnel  $r$  non nul,  $e^r$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}$ , autrement dit, qu'il n'existe pas de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  dont  $e^r$  soit racine. De même, si  $r$  est un rationnel strictement positif, distinct de 1, on peut démontrer que  $\text{Log } r$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}$ .

## 10. Formule de Taylor avec reste intégral

Il s'agit de la formule suivante :

**Théorème 7.12.** *Soient  $n$  un entier naturel,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ . Quels que soient  $a$  et  $x$  dans  $I$ , on a*

$$(33) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Démonstration : Procédons par récurrence. Si  $n = 0$  la formule (33) est vraie vu que  $f$  étant de classe  $C^1$  sur  $I$ , on a (th. 7.9 et déf. 7.10)

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Soit  $n$  un entier naturel pour lequel la relation (33) soit vraie. On suppose  $f$  de classe  $C^{n+2}$  sur  $I$ . Il s'agit de prouver que (33) est vraie pour l'entier  $n+1$ . D'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

L'égalité

$$\left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a).$$

entraîne alors l'assertion.

**Remarque 7.10.** Avec les notations et les hypothèses du théorème 7.12, supposons de plus que 0 soit dans  $I$ . Pour tout  $x \in I$ , on obtient la formule de type Mac Laurin

$$(34) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

La fonction  $f^{(n+1)}$  étant continue sur  $I$ , elle est bornée sur tout intervalle fermé borné contenu dans  $I$ . Par suite, pour tout  $x \in I$ , il existe une constante  $M_n$ , qui dépend de  $n$ , telle que l'on ait

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M_n \quad \text{pour tout } t \in [0, x] \text{ ou } [x, 0].$$

On déduit alors de (34) l'inégalité

$$(35) \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq M_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Exemple 7.12.** Si l'on prend pour  $f$  la fonction exponentielle, on a  $f^{(n+1)} = f$  pour tout  $n$ , de sorte que  $M_n$  ne dépend pas de  $n$ . Le second membre de (35) étant alors convergent de limite nulle, on retrouve le développement en série de la fonction exponentielle

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . De même, on retrouve avec (35) les développements en série des fonctions sinus et cosinus, la constante  $M_n$  dans ces exemples pouvant être prise égale à 1.

## 11. Formule du changement de variable

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . Posons  $I = [a, b]$ .

**Théorème 7.13.** Soient  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $f : u(I) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $u(I)$ . On a l'égalité

$$(36) \quad \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx.$$

Démonstration : Remarquons que d'après les hypothèses faites, la fonction qui à  $x$  associe  $f(u(x))u'(x)$  est continue sur  $I$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  dans  $u(I)$  (qui est un intervalle car  $u$  est continue). Le premier membre de (36) vaut  $F(u(b)) - F(u(a))$  (th. 7.9). Par ailleurs, la fonction  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $G(x) = F(u(x))$  est dérivable dans  $I$  et pour tout  $x \in I$  on a

$$G'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Le second membre de (36) est donc  $G(b) - G(a)$  i.e.  $F(u(b)) - F(u(a))$ , d'où le résultat.

### Exemples 7.13.

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

En effet, posons  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$  et considérons la fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $u(x) = \frac{\pi}{2} - x$  et la fonction  $f = \sin^n$ . On a  $f(u(x)) = \cos^n x$ , d'où l'égalité

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t \, dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

2) Soit  $R$  un nombre réel positif. Vérifions que l'aire d'un disque de rayon  $R$  est  $\pi R^2$ . On considère pour cela le «demi-disque»

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

Soit  $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Il s'agit de déterminer

$$\int_{-R}^R f(x) dx,$$

qui est par définition l'aire de ce demi-disque. Soit  $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$u(x) = R \cos x.$$



Elle est de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ . On a  $u([0, \pi]) = [-R, R]$  et pour tout  $x \in [0, \pi]$  on a

$$f(u(x))u'(x) = -R^2 \sin^2 x.$$

D'après la formule (36) on obtient

$$\int_R^{-R} f(x) dx = -R^2 \int_0^\pi \sin^2 x \, dx.$$

On a  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , d'où

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2},$$

puis l'égalité attendue

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \frac{\pi R^2}{2},$$

et le résultat après multiplication par 2.

## 12. Calcul approché d'une intégrale

Étant donnés deux nombres réels  $a$  et  $b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable suffisamment régulière, on va décrire une méthode permettant d'obtenir des valeurs approchées de  $\int_a^b f$ . Le principe général est de remplacer  $f$  par une fonction  $g$ , qui est souvent une fonction polynôme, qui « approche »  $f$ , dont on sait calculer l'intégrale entre  $a$  et  $b$ , et ensuite d'estimer l'erreur  $|\int_a^b f - \int_a^b g|$ . On va présenter ici la méthode des trapèzes.

### Méthode des trapèzes

Commençons par remplacer  $f$  par son interpolation linéaire  $g$  sur  $[a, b]$ , définie par l'égalité

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On a

$$\int_a^b g = \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)).$$

**Proposition 7.12.** *Supposons  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ . Soit  $M$  la borne supérieure de la fonction  $|f^{(2)}|$  sur  $[a, b]$ . On a*

$$(37) \quad \int_a^b f = \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b)) + R(f) \quad \text{avec} \quad |R(f)| \leq \frac{(b - a)^3}{12} M.$$

Démonstration : Soit  $t$  un élément de  $]a, b[$ . Considérons la fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in [a, b]$  par

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) - \frac{f(t) - g(t)}{(t-a)(t-b)}(x-a)(x-b).$$

On a les égalités

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(t) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle il existe  $c \in ]a, t[$  et  $d \in ]t, b[$  tels que  $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$ . En utilisant ce théorème avec la fonction  $\varphi'$ , on en déduit l'existence d'un élément  $z \in ]c, d[$  tel que  $\varphi^{(2)}(z) = 0$ . Par ailleurs, pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\varphi^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - 2 \frac{f(t) - g(t)}{(t-a)(t-b)}.$$

Il en résulte que l'on a

$$f(t) - g(t) = \frac{f^{(2)}(z)}{2}(t-a)(t-b),$$

d'où l'inégalité

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{M}{2} |(t-a)(t-b)|.$$

Puisque  $f(a) = g(a)$  et  $f(b) = g(b)$ , cette inégalité est valable pour tout  $t \in [a, b]$ . Vu que l'on a

$$R(f) = \int_a^b f - \int_a^b g,$$

on obtient alors

$$|R(f)| = \left| \int_a^b (f - g) \right| \leq \int_a^b |f - g| \leq \frac{M}{2} \int_a^b (t-a)(b-t) dt = \frac{(b-a)^3}{12} M,$$

d'où le résultat.

On peut affiner la méthode précédente en considérant la subdivision  $(x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  avec

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n),$$

et en appliquant la formule (37) sur chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$ . Plus précisément :

**Proposition 7.13.** *Supposons  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ . Soit  $M$  la borne supérieure de la fonction  $|f^{(2)}|$  sur  $[a, b]$ . On a*

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right) + R(f) \quad \text{avec} \quad |R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M.$$

Démonstration : On écrit que l'on a

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f.$$

D'après la proposition 7.12, on a

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) + R_k(f) \quad \text{avec} \quad |R_k(f)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} M_k,$$

où  $M_k$  est la borne supérieure de  $|f^{(2)}|$  sur  $[x_{k-1}, x_k]$ . On a

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad M_k \leq M,$$

d'où il résulte que

$$|R_k(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} M.$$

Par suite, on a

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right) + \sum_{k=1}^n R_k(f),$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^n R_k(f) \right| \leq \sum_{k=1}^n |R_k(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M,$$

d'où le résultat.

**Exemple 7.14.** Évaluons l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sin(x^2) \, dx.$$

Pour tout  $x \in [0, 1]$  posons  $f(x) = \sin(x^2)$ . On a  $f'(x) = 2x \cos(x^2)$ , d'où

$$f^{(2)}(x) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2),$$

de sorte que la borne supérieure de la fonction  $|f^{(2)}|$  est plus petite que 6. Pour tout  $n \geq 1$ , on a donc (prop. 7.13)

$$I = \frac{1}{2n} \left( 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \sin 1 \right) + R_n \quad \text{avec} \quad |R_n| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Avec  $n = 10^4$ , on vérifie que l'on a

$$0,3102682 < I < 0,3102684.$$

Par suite, 0,310268 est l'approximation décimale de  $I$  à  $10^{-6}$  près par défaut.