

## Chapitre X - Géométrie affine

### Table des matières

1. Espaces affines	1
2. Sous-espaces affines	2
3. Applications affines	6
4. Repères cartésiens - Coordonnées cartésiennes	10
5. Endomorphismes affines - Points fixes	14
6. Mesure algébrique	17
7. Théorème de Thalès	18
8. Barycentres	20
9. Propriétés des barycentres	21
10. Coordonnées barycentriques	24
11. Cas d'un plan affine	25
12. Droites en coordonnées barycentriques dans le plan	28
13. Quelques théorèmes classiques	31

### 1. Espaces affines

Soit  $E$  un ensemble non vide.

**Définition 10.1.** Une structure d'espace affine sur  $E$  est la donnée d'un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{R}$  et d'une application  $E \times E \rightarrow V$ , notée  $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ , tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- 1) (**relation de Chasles**) pour tous  $A, B, C$  dans  $E$ , on a  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .
- 2) Pour tout  $A$  dans  $E$ , l'application  $\alpha_A : E \rightarrow V$  définie pour tout  $M \in E$  par

$$\alpha_A(M) = \overrightarrow{AM},$$

est une bijection de  $E$  sur  $V$ .

**Terminologie.** Les éléments de  $E$  sont appelés points. On dit que  $V$  est l'espace directeur de  $E$ , ou la direction de  $E$ . On notera désormais  $V = \overrightarrow{E}$  et  $0$  le vecteur nul de  $\overrightarrow{E}$ .

On déduit de la relation de Chasles que pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$ , on a

$$\overrightarrow{AA} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

De plus, si  $\overrightarrow{AB} = 0$ , on obtient  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ , autrement dit  $\alpha_A(A) = \alpha_A(B)$ , d'où  $A = B$ . On a donc l'équivalence

$$\overrightarrow{AB} = 0 \iff A = B.$$

**Exemple 10.1.** Tout espace vectoriel  $X$  sur  $\mathbb{R}$  est muni d'une structure d'espace affine, pour laquelle on a  $\overrightarrow{X} = X$ , l'application  $X \times X \rightarrow X$  étant celle qui au couple  $(u, v) \in X \times X$  associe  $v - u$ . Par définition, on a ainsi

$$(1) \quad \overrightarrow{uv} = v - u.$$

On dit que c'est la structure d'espace affine canonique de  $X$ .

**Définition 10.2 («Addition» d'un point et d'un vecteur).** Soient  $A$  un point  $E$  et  $u$  un vecteur de  $\overrightarrow{E}$ . On définit  $A + u$  comme étant le point  $B$  de  $E$  tel que  $\overrightarrow{AB} = u$ . Autrement dit, on a  $A + u = \alpha_A^{-1}(u)$ .

Pour tous  $A \in E$  et  $u, v \in \overrightarrow{E}$ , on a

$$(2) \quad (A + u) + v = A + (u + v).$$

En effet, si  $B = A + u$  et  $C = B + v$ , on a  $u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , d'où  $C = A + (u + v)$ .

Notons que si  $E$  est un espace vectoriel, l'addition d'un point et d'un vecteur ainsi définie n'est autre que l'addition de structure sur  $E$ .

## 2. Sous-espaces affines

Soient  $E$  un espace affine et  $F$  une partie de  $E$ .

**Définition 10.3.** On dit que  $F$  est un sous-espace affine de  $E$  s'il existe un point  $A$  dans  $F$  pour lequel

$$\alpha_A(F) = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\},$$

soit un sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$ .

**Lemme 10.1.** Supposons que  $F$  soit un sous-espace affine de  $E$ . Pour tout  $B$  dans  $F$ , l'ensemble  $\alpha_B(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$ , qui est indépendant de  $B$ .

Démonstration : Par définition, il existe  $A$  dans  $F$  tel que  $\alpha_A(F)$  soit un sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$ . Soit  $B$  un point de  $F$ . Vérifions que l'on a  $\alpha_A(F) = \alpha_B(F)$ , ce qui établira l'assertion. Compte tenu de la relation de Chasles, on a

$$\alpha_B(F) = \{\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \mid M \in F\}.$$

Parce que  $\alpha_A(F)$  est sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ ,  $\alpha_B(F)$  est donc contenu dans  $\alpha_A(F)$ . Inversement, si  $u$  est un élément de  $\alpha_A(F)$ , le vecteur  $u + \overrightarrow{AB}$  est aussi dans  $\alpha_A(F)$  et il existe  $M \in F$  tel que  $u + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ . On a  $u = \overrightarrow{BM}$ , donc  $u$  est dans  $\alpha_B(F)$ , d'où l'égalité annoncée.

**Définition 10.4.** Supposons que  $F$  soit un sous-espace affine de  $E$ . Pour tout  $A \in F$ , on dit que  $\alpha_A(F)$  est le sous-espace directeur de  $F$ , ou la direction de  $F$ . On le note  $\vec{F}$ .

L'application  $F \times F \rightarrow \vec{F}$  qui au couple  $(P, Q) \in F \times F$  associe le vecteur  $\overrightarrow{PQ}$  munit  $F$  d'une structure d'espace affine. On dit que c'est la structure affine de  $F$  induite par celle de  $E$ . Dans toute la suite, les sous-espaces affines de  $E$  seront considérés comme munis de cette structure affine.

**Lemme 10.2.** Supposons que  $F$  soit un sous-espace affine de  $E$ . Soit  $A$  un point de  $F$ . Pour tout  $M$  dans  $E$ , on a l'équivalence

$$M \in F \iff \overrightarrow{AM} \in \vec{F}.$$

Démonstration : Soit  $M$  un point de  $E$ . Si  $M \in F$ ,  $\alpha_A(M) = \overrightarrow{AM} \in \alpha_A(F) = \vec{F}$ . Inversement, si  $\overrightarrow{AM} \in \vec{F}$ , on a  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP}$  où  $P \in F$ , d'où  $M = P$  et  $M$  est dans  $F$ .

**Lemme 10.3.** Soient  $A$  un point de  $E$  et  $X$  un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ . Il existe un unique sous-espace affine de  $E$  passant par  $A$  et de direction  $X$ . C'est l'ensemble  $\alpha_A^{-1}(X)$ .

Démonstration : On a  $\alpha_A(A) = 0 \in X$  donc  $A$  appartient à  $\alpha_A^{-1}(X)$  et l'on a  $\alpha_A(\alpha_A^{-1}(X)) = X$ , ce qui prouve que  $\alpha_A^{-1}(X)$  est un sous-espace affine de  $E$  passant par  $A$  et dirigé par  $X$ . Par ailleurs, si  $H$  est un sous-espace affine de  $E$  ayant ces propriétés, on a  $X = \alpha_A(H)$ , d'où  $H = \alpha_A^{-1}(X)$  et l'assertion.

**Lemme 10.4.** Supposons que  $E$  soit un espace vectoriel. Les sous-espaces affines de  $E$  passant par 0 sont exactement les sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Démonstration : Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , 0 est dans  $H$  et l'on a  $\alpha_0(H) = H$ , ce qui prouve que  $H$  est un sous-espace affine de  $E$ . Inversement, si  $H$  un sous-espace affine de  $E$  contenant 0, l'ensemble  $\alpha_0(H)$  i.e.  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (lemme 10.1).

**Lemme 10.5.** Soient  $F_1$  et  $F_2$  des sous-espaces affines de  $E$  tels que  $F_1 \cap F_2$  ne soit pas vide. Alors  $F_1$  est contenu dans  $F_2$  si et seulement si  $\vec{F}_1$  est contenu dans  $\vec{F}_2$ .

Démonstration : Soit  $A$  un point de  $F_1 \cap F_2$ . Si  $F_1$  est contenu dans  $F_2$ ,  $\alpha_A(F_1) = \vec{F}_1$  est contenu dans  $\alpha_A(F_2) = \vec{F}_2$ . Inversement, si  $M$  est un point de  $F_1$ , alors  $\alpha_A(M)$  appartient à  $\alpha_A(F_2)$ . Il existe  $N \in F_2$  tel que  $\alpha_A(M) = \alpha_A(N)$ , d'où  $M = N \in F_2$ .

**Lemme 10.6.** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $E$ . L'intersection des  $F_i$ , si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de  $E$ , et l'on a

$$\overrightarrow{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcap_{i \in I} \overrightarrow{F_i}.$$

Démonstration : Supposons qu'il existe un point  $A$  dans l'intersection des  $F_i$ . On a par définition  $\alpha_A(F_i) = \overrightarrow{F_i}$ . Puisque  $\alpha_A$  est une bijection, l'image par  $\alpha_A$  de l'intersection des  $F_i$  est l'intersection des  $\overrightarrow{F_i}$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$ , d'où l'assertion.

Cela justifie la définition suivante :

**Définition 10.5 (Sous-espace affine engendré).** Soit  $X$  une partie non vide  $E$ . On appelle sous-espace affine engendré par  $X$  l'intersection des sous-espaces affines de  $E$  qui contiennent  $X$ . On le notera  $\langle X \rangle$ . C'est le plus petit sous-espace affine de  $E$  contenant  $X$ .

**Lemme 10.7.** Soient  $X$  une partie non vide  $E$  et  $A$  un point de  $X$ . Alors  $\langle X \rangle$  est le sous-espace affine de  $E$  passant par  $A$  et de direction le sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$  engendré par  $\{\overrightarrow{AM} \mid M \in X\}$ .

Démonstration : Soit  $H$  le sous-espace affine de  $E$  passant par  $A$  et dirigé par le sous-espace vectoriel  $V$  de  $\overrightarrow{E}$  engendré par les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  où  $M$  parcourt  $X$ . L'ensemble  $X$  est contenu dans  $H$ . En effet, si  $M$  est un point de  $X$ , le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  appartient à  $V$ . Puisque  $V = \alpha_A(H)$  (lemme 10.1), il en résulte que  $M$  est dans  $H$ . Par ailleurs, soit  $K$  un sous-espace affine de  $E$  contenant  $X$ . Vérifions que  $K$  contient  $H$ , ce qui prouvera que  $H$  est le plus petit sous-espace affine de  $E$  contenant  $X$  et le résultat. Compte tenu du lemme 10.5, il suffit de vérifier que  $V$  est contenu dans  $\overrightarrow{K}$ . Soit  $u$  un élément de  $V$ . Il existe des réels  $\alpha_i$  et des points  $M_i \in X$  tels que l'on ait

$$u = \sum \alpha_i \overrightarrow{AM_i}.$$

Puisque  $A$  et les  $M_i$  sont dans  $K$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AM_i}$  sont dans  $\overrightarrow{K}$ , d'où  $u \in \overrightarrow{K}$  et l'assertion.

**Définition 10.6 (Dimension).** 1) La dimension d'un espace affine est la dimension sur  $\mathbb{R}$  de son espace directeur (éventuellement infinie).

2) Un espace affine de dimension 1 s'appelle une droite. Un espace affine de dimension 2 s'appelle un plan.

Les sous-espaces affines de  $E$  de dimension 0 sont les points. Par définition, les droites de  $E$  sont les sous-espaces affines de  $E$  de dimension 1.

**Lemme 10.8.** Soient  $A$  et  $B$  des points distincts de  $E$ . Il existe une unique droite de  $E$  passant par  $A$  et  $B$ . C'est le sous-espace affine  $\langle A, B \rangle$  de  $E$  engendré par  $\{A, B\}$ . On a

$$\langle A, B \rangle = \left\{ A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration : Le sous-espace affine  $\langle A, B \rangle$  a pour direction le sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  engendré par  $\overrightarrow{AB}$  (lemme 10.7). Il est de dimension 1. Ainsi  $\langle A, B \rangle$  est une droite de  $E$ . Par ailleurs, si  $D$  une droite de  $E$  passant par  $A$  et  $B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  appartient à  $\vec{D}$ , donc  $\vec{D}$  est la droite de  $\vec{E}$  engendrée par  $\overrightarrow{AB}$ . D'après le lemme 10.3, on a donc  $D = \langle A, B \rangle$ . Le lemme 10.2 entraîne alors le résultat.

**Lemme 10.9.** Soient  $A_0, \dots, A_n$  des points de  $E$ . Posons  $X = \{A_0, \dots, A_n\}$ . Le sous-espace affine de  $E$  engendré par  $X$  est

$$\langle X \rangle = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sa dimension est celle du sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  engendré par les vecteurs  $\overrightarrow{A_0 A_i}$ .

Démonstration : Un point  $M$  de  $E$  est dans  $\langle X \rangle$  si et seulement si  $\overrightarrow{A_0 M}$  appartient à la direction de  $\langle X \rangle$  i.e. au sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  engendré par les vecteurs  $\overrightarrow{A_0 A_i}$  (lemmes 10.2 et 10.7), d'où l'assertion.

**Définition 10.7 (Repère affine).** Un repère affine de  $E$  est un  $n+1$ -uplet  $(A_0, \dots, A_n)$  de points de  $E$  tel que le sous-espace affine engendré par  $\{A_0, \dots, A_n\}$  soit  $E$  tout entier.

Compte tenu du lemme 10.9, si  $(A_0, \dots, A_n)$  est un repère affine de  $E$ , le système  $(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$  est une base de  $\vec{E}$ . Pour tout point  $M \in E$  il existe alors des réels  $\alpha_i$  tels que l'on ait

$$\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i}.$$

**Définition 10.8 (Triangle).** On appellera triangle de  $E$  tout ensemble de trois points de  $E$  non alignés.

**Remarque 10.1.** Supposons que  $E$  soit un plan affine. Soit  $(A, B, C)$  un repère affine de  $E$ . Avec notre définition, l'ensemble  $\{A, B, C\}$  est un triangle de  $E$ . Par ailleurs, un triangle de  $E$  détermine six repères affines de  $E$ .

**Lemme 10.10.** Soient  $F_1$  et  $F_2$  des sous-espaces affines de  $E$ . Soient  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) un point de  $F_1$  (resp.  $F_2$ ). On a l'équivalence

$$F_1 \cap F_2 \text{ est non vide} \iff \overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Démonstration : Supposons  $F_1 \cap F_2$  non vide. Soit  $A$  un point de  $F_1 \cap F_2$ . On a  $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{A A_2} = \overrightarrow{A A_2} - \overrightarrow{A A_1}$ , qui est dans  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  car  $\overrightarrow{A A_1}$  est dans  $\vec{F}_1$  et  $\overrightarrow{A A_2}$

est dans  $\overrightarrow{F_2}$ . Inversement, supposons  $\overrightarrow{A_1A_2} \in \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ . On a  $\overrightarrow{A_1A_2} = u_1 + u_2$  où  $u_i \in \overrightarrow{F_i}$ . Posons  $A = A_1 + u_1$ . On a (relation de Chasles)

$$\overrightarrow{A_1A} = u_1 \in \overrightarrow{F_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_2A} = -u_2 \in \overrightarrow{F_2},$$

par suite,  $A$  est dans  $F_1 \cap F_2$  (lemme 10.2).

**Corollaire 10.1.** *Soient  $F_1$  et  $F_2$  des sous-espaces affines de  $E$  tels que  $\overrightarrow{F_1}$  et  $\overrightarrow{F_2}$  soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\overrightarrow{E}$ . Alors  $F_1 \cap F_2$  est un singleton.*

Démonstration : D'après le lemme 10.10,  $F_1 \cap F_2$  est non vide. Ainsi  $F_1 \cap F_2$  est un sous-espace affine de  $E$  (lemme 10.6) et sa dimension, qui est celle de  $\overrightarrow{F_1} \cap \overrightarrow{F_2}$  (*loc. cit.*), vaut 0, d'où l'assertion.

**Définition 10.9 (Parallélisme).** *Soient  $F_1$  et  $F_2$  des sous-espaces affines de  $E$ .*

- 1) *On dit qu'ils sont parallèles, au sens strict, si  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$ .*
- 2) *On dit qu'ils sont parallèles, au sens large, si  $\overrightarrow{F_1}$  est contenu dans  $\overrightarrow{F_2}$ .*

Dans la suite, on dira que deux sous-espaces affines sont parallèles, sans autre précision, pour signifier qu'ils le sont au sens strict. Par exemple, si  $E$  est un plan affine, deux droites de  $E$  non parallèles se coupent en un unique point (cor. 10.1).

### 3. Applications affines

Soient  $E$  et  $F$  des espaces affines.

**Définition 10.10.** *Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit qu'elle est affine, ou que c'est un morphisme affine, s'il existe une application linéaire  $r : \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{F}$  telle que l'on ait*

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = r(\overrightarrow{AB}) \quad \text{pour tous } A \text{ et } B \text{ dans } E.$$

Cette condition signifie que le vecteur  $\overrightarrow{f(A)f(B)}$  est une fonction linéaire du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Puisque tout vecteur de  $\overrightarrow{E}$  est de la forme  $\overrightarrow{AB}$ , pour  $A$  et  $B$  convenables dans  $E$ , il existe au plus une telle application linéaire  $r$ . Si elle existe, on dit que c'est l'application linéaire associée à  $f$  et on note  $r = \overrightarrow{f}$ . Si  $f : E \rightarrow F$  est une application affine, on a donc l'égalité

$$(3) \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \quad \text{pour tous } A \text{ et } B \text{ dans } E,$$

où  $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{F}$  est l'application linéaire associée à  $f$ .

**Lemme 10.11.** *Une application affine de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par l'image d'un point et par son application linéaire associée.*

Démonstration : Soient  $f, g : E \rightarrow F$  des applications affines. Supposons qu'il existe  $A \in E$  tel que  $f(A) = g(A)$  et que  $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ . Soit  $M$  un point de  $E$ . On a les égalités

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{g(A)g(M)},$$

d'où il résulte que  $f(M) = g(M)$  i.e. que  $f = g$ .

On peut préciser ce résultat :

**Lemme 10.12.** *Soient  $A$  un point de  $E$ ,  $B$  un point de  $F$  et  $r$  une application linéaire de  $\vec{E}$  dans  $\vec{F}$ . Il existe une unique application affine  $f : E \rightarrow F$  telle que  $f(A) = B$  et que  $r = \vec{f}$ .*

Démonstration : Soit  $f : E \rightarrow F$  l'application définie pour tout  $M \in E$  par l'égalité

$$f(M) = B + r(\overrightarrow{AM}).$$

On a  $f(A) = B$ . Par ailleurs, pour tous  $M$  et  $N$  dans  $E$  on a

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)B} + \overrightarrow{Bf(N)} = -r(\overrightarrow{AM}) + r(\overrightarrow{AN}) = r(\overrightarrow{MN}),$$

ce qui prouve que  $f$  est affine et que  $r$  est son application linéaire associée, d'où l'assertion d'existence. L'assertion d'unicité résulte du lemme 10.11.

### Exemples 10.2.

1) Les applications constantes sont affines et leur application linéaire associée est l'application linéaire nulle. De plus, si  $f : E \rightarrow F$  est une application affine, elle est constante si et seulement si  $\vec{f}$  est nulle. En effet, si  $\vec{f} = 0$ , pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$ , on a  $\overrightarrow{f(A)f(B)} = 0$ , d'où  $f(A) = f(B)$ .

2) Les translations de  $E$  sont des applications affines. Rappelons leur définition.

**Définition 10.11 (Translation).** *Soit  $f : E \rightarrow E$  une application. On dit que c'est une translation s'il existe un vecteur  $u \in \vec{E}$  tel que l'on ait*

$$(4) \quad f(M) = M + u \quad \text{pour tout } M \in E.$$

On dit alors que  $f$  est la translation de vecteur  $u$ . On note souvent  $f = t_u$ .

La formule (4) signifie que l'on a  $\overrightarrow{Mf(M)} = u$ . La translation de vecteur nul est l'identité de  $E$ . Comme conséquence de la relation (2), on obtient pour tous  $u$  et  $v$  dans  $\vec{E}$  l'égalité

$$t_{u+v} = t_u \circ t_v.$$

**Lemme 10.13.** *Les translations de  $E$  sont des applications affines. Elles sont caractérisées par le fait que leur application linéaire associée est l'identité de  $\vec{E}$ .*

Démonstration : Soient  $u$  un vecteur de  $\vec{E}$  et  $f$  la translation de vecteur  $u$ . Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$ , on a

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bf(B)} = -u + \overrightarrow{AB} + u = \overrightarrow{AB},$$

ce qui prouve que  $f$  est affine et que  $\overrightarrow{f}$  est l'identité de  $\overrightarrow{E}$ . Inversement, soit  $f : E \rightarrow E$  une application affine telle que  $\overrightarrow{f}$  soit l'identité de  $\overrightarrow{E}$ . Soit  $A$  un point de  $E$ . Posons  $u = \overrightarrow{Af(A)}$  et vérifions que  $f$  est la translation de vecteur  $u$ . Soit  $M$  un point de  $E$ . On a les égalités

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f(A)\vec{A}} + \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f(A)\vec{A}} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{Mf(M)}.$$

Puisque  $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}$ , on obtient  $\overrightarrow{Mf(M)} = u$  i.e.  $f(M) = M + u$ , d'où le résultat.

3) Un autre exemple d'applications affines est donné par les homothéties.

**Définition 10.12 (Homothétie).** Soit  $h : E \rightarrow E$  une application. On dit que  $h$  est une homothétie s'il existe un point  $O$  de  $E$  et un nombre réel  $\lambda$  non nul tels que l'on ait

$$(5) \quad h(M) = O + \lambda \overrightarrow{OM} \quad \text{pour tout } M \in E.$$

On dit alors que  $h$  est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$ .

**Remarques 10.2.**

1) Si  $\lambda = 1$ , on a  $h(M) = O + \overrightarrow{OM}$  i.e.  $\overrightarrow{Oh(M)} = \overrightarrow{OM}$ , d'où  $h(M) = M$  et  $h$  est l'identité de  $E$ .

2) On a  $h(O) = O$ . Si  $\lambda \neq 1$ , alors  $O$  est le seul point fixe de  $h$  et son centre est uniquement déterminé.

**Lemme 10.14.** Les homothéties de  $E$  sont des applications affines.

Démonstration : Soit  $h$  une homothétie de  $E$ . Par définition, il existe un point  $O$  de  $E$  et un réel  $\lambda$  non nul tels que la condition (5) soit satisfaite. Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$  on a les égalités

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{h(A)\vec{O}} + \overrightarrow{Oh(B)} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Cela prouve que  $h$  est affine et que son application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de  $\overrightarrow{E}$  de rapport  $\lambda$ , i.e. l'endomorphisme de  $\overrightarrow{E}$  qui à  $x$  associe  $\lambda x$ .

**Proposition 10.1.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application affine.

1) Soient  $G$  un espace affine et  $g : F \rightarrow G$  une application affine. Alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est affine et l'on a  $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ .

2) Pour que  $f$  soit une bijection de  $E$  sur  $F$  il faut et il suffit que  $\overrightarrow{f}$  soit une bijection de  $\overrightarrow{E}$  sur  $\overrightarrow{F}$ .

3) Si  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ , l'application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est affine et l'on a  $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$ . Dans ce cas, on dit que  $f$  est un isomorphisme affine de  $E$  sur  $F$ .

4) L'image directe d'un sous-espace affine  $X$  de  $E$  par  $f$  est un sous-espace affine de  $F$ . De plus, on a  $\overrightarrow{f(X)} = \overrightarrow{f}(X)$ .



5) L'image réciproque d'un sous-espace affine  $Y$  de  $F$  par  $f$ , si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de  $E$ . Dans ce cas, on a  $\overrightarrow{f^{-1}(Y)} = \overrightarrow{f}^{-1}(Y)$ .

Démonstration : Soient  $A$  et  $B$  des points de  $E$ .

1) On a les égalités

$$\overrightarrow{g \circ f(A)g \circ f(B)} = \overrightarrow{g(f(A)f(B))} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}),$$

d'où la première assertion vu que  $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$  est une application linéaire de  $\overrightarrow{E}$  dans  $\overrightarrow{G}$ .

2) Les applications  $\alpha_A : E \rightarrow \overrightarrow{E}$  et  $\alpha_{f(A)} : F \rightarrow \overrightarrow{F}$  sont des bijections et l'on vérifie que l'on a

$$\alpha_{f(A)} \circ f \circ \alpha_A^{-1} = \overrightarrow{f} \quad \text{et} \quad \alpha_{f(A)}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \alpha_A = f,$$

ce qui entraîne l'assertion.

3) Soient  $M$  et  $N$  des points de  $F$ . Posons  $C = f^{-1}(M)$  et  $D = f^{-1}(N)$ . On a

$$\overrightarrow{f(C)f(D)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{CD}).$$

L'application  $\overrightarrow{f}$  étant une bijection de  $\overrightarrow{E}$  sur  $\overrightarrow{F}$  (assertion 2), on a

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f(C)f(D)}) \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{f^{-1}(M)f^{-1}(N)} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{MN}),$$

d'où le résultat, vu que  $\overrightarrow{f}^{-1}$  est une application linéaire de  $\overrightarrow{F}$  dans  $\overrightarrow{E}$ .

4) Soit  $B$  un point de  $f(X)$ . Démontrons que l'on a

$$(6) \quad \alpha_B(f(X)) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}),$$

ce qui prouvera que  $\alpha_B(f(X))$  est un sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{F}$  et le résultat. Soit  $A \in X$  tel que  $f(A) = B$ . On a  $\overrightarrow{X} = \alpha_A(X)$ . Soit  $M$  un point de  $f(X)$ . On a  $M = f(N)$  où  $N$  est dans  $X$ . On obtient

$$\alpha_B(M) = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{f(A)f(N)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AN}) \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}).$$

Inversement, soit  $u$  un élément de  $\overrightarrow{X}$ . Il existe  $P \in X$  tel que  $u = \overrightarrow{AP}$ . On a

$$\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{f(A)f(P)} = \overrightarrow{Bf(P)} = \alpha_B(f(P)) \in \alpha_B(f(X)).$$

Cela établit l'égalité (6).

5) Supposons qu'il existe un point  $A$  dans l'image réciproque de  $Y$  par  $f$ . Démontrons que l'on a

$$(7) \quad \alpha_A(f^{-1}(Y)) = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{Y}),$$

ce qui prouvera l'assertion. Soit  $u$  un élément de  $\alpha_A(f^{-1}(Y))$ . Il existe  $M \in E$  tel que

$$u = \overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad f(M) \in Y.$$

On a donc  $\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f(A)f(M)} \in \overrightarrow{Y}$ , autrement dit  $u$  appartient à l'image réciproque de  $\overrightarrow{Y}$  par  $\overrightarrow{f}$ . Inversement, soit  $v$  un élément de  $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{Y})$ . On a  $\overrightarrow{Y} = \alpha_{f(A)}(Y)$ , d'où l'existence d'un point  $M \in Y$  tel que  $\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f(A)M}$ . Par ailleurs, il existe  $P \in E$  tel que  $v = \overrightarrow{AP}$ . On a alors les égalités

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{f(A)f(P)} = \overrightarrow{f(A)M},$$

d'où  $M = f(P)$  et  $P$  appartient à  $f^{-1}(Y)$ . L'égalité  $v = \alpha_A(P)$  entraîne alors (7).

**Définition 10.13.** Deux espaces affines sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme affine de l'un sur l'autre.

**Lemme 10.15.** Deux espaces affines de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Démonstration : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces affines. S'ils sont isomorphes les espaces vectoriels  $\overrightarrow{E}$  et  $\overrightarrow{F}$  le sont aussi (prop. 10.1), ils ont donc la même dimension, et par définition, tel est le cas de  $E$  et  $F$ . Inversement, supposons que  $E$  et  $F$  aient la même dimension. Il en est donc ainsi des espaces vectoriels  $\overrightarrow{E}$  et  $\overrightarrow{F}$ . Ils sont donc isomorphes, i.e. il existe une application linéaire  $r$  bijective de  $\overrightarrow{E}$  sur  $\overrightarrow{F}$ . Soient alors  $A$  un point de  $E$  et  $B$  un point de  $F$ . Il existe une application affine  $f : E \rightarrow F$  telle que  $f(A) = B$  et que  $r = \overrightarrow{f}$  (lemme 10.12). Parce que  $r$  est bijective,  $f$  l'est aussi (prop. 10.1) et  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

#### 4. Repères cartésiens - Coordonnées cartésiennes

Soit  $E$  un espace affine de dimension finie  $n$ .

**Définition 10.14.** Un repère cartésien de  $E$  est un couple  $(O, (u_1, \dots, u_n))$ , où  $O$  est un point de  $E$  et  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $\overrightarrow{E}$ . On dit que  $O$  est l'origine du repère et que  $u_1, \dots, u_n$  en sont les vecteurs de base.

Choisissons un repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, (u_1, \dots, u_n))$  de  $E$ . Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe un unique isomorphisme affine  $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que  $\theta(O) = 0$ , dont l'application linéaire associée  $\overrightarrow{\theta} : \overrightarrow{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit définie par les égalités

$$\overrightarrow{\theta}(u_i) = e_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

On peut alors «repérer» tout point de  $E$  par un élément de  $\mathbb{R}^n$ , à savoir son image par  $\theta$ .

**Définition 10.15.** Pour tout point  $M$  de  $E$ , les coordonnées cartésiennes de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  sont les coordonnées de  $\theta(M)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 10.16.** Soit  $M$  un point de  $E$ . Les coordonnées cartésiennes de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  sont les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\vec{E}$ .

Démonstration : Par définition de la structure d'espace affine du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  (formule (1)), on a

$$\overrightarrow{\theta(\overrightarrow{OM})} = \overrightarrow{\theta(O)\theta(M)} = \theta(M) - \theta(O) = \theta(M).$$

Si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$ , on a

$$\overrightarrow{\theta(\overrightarrow{OM})} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

d'où  $\theta(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et l'assertion.

Décrivons la représentation cartésienne des applications affines de  $E$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

**Proposition 10.2.** Soit  $f : E \rightarrow E$  une application. Elle est affine si et seulement si la condition suivante est satisfaite : il existe une matrice  $T$  de taille  $(n, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , tels que pour tout point  $M \in E$ , en posant

$$\theta(M) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \theta(f(M)) = (y_1, \dots, y_n),$$

on ait l'égalité

$$(8) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas,  $T$  est la matrice de  $\vec{f}$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$ .

Démonstration : Supposons  $f$  affine. Posons  $f(O) = A$  et  $\theta(A) = (a_1, \dots, a_n)$ . Pour tout  $M \in E$  on a

$$\overrightarrow{Af(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}).$$

Soit  $T$  la matrice représentant  $\vec{f}$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$ . Si  $\theta(M) = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\theta(f(M)) = (y_1, \dots, y_n)$ , on en déduit que (lemme 10.16)

$$\begin{pmatrix} y_1 - a_1 \\ \vdots \\ y_n - a_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

d'où la condition (8).

Inversement, soit  $g$  l'application affine de  $E$  qui envoie  $O$  sur le point de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$  telle que  $T$  soit la matrice de  $\vec{g}$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$ . Pour tout  $M \in E$ , on a  $\overrightarrow{g(O)g(M)} = \vec{g}(\overrightarrow{OM})$ . En posant  $\theta(M) = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\theta(g(M)) = (y_1, \dots, y_n)$ , on obtient l'égalité (8). Pour tout  $M \in E$  on a donc

$$\theta(g(M)) = \theta(f(M)),$$

d'où  $g(M) = f(M)$ . Ainsi  $g = f$  et  $f$  est affine.

**Corollaire 10.2.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application. Elle est affine si et seulement si la condition suivante est satisfaite : il existe une matrice  $T$  de taille  $(n, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , tels que pour tout point  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , en posant  $f((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_n)$ , on ait l'égalité*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas,  $T$  est la matrice de  $\vec{f}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 10.2, en prenant pour repère cartésien de  $\mathbb{R}^n$ , celui formé du point  $(0, \dots, 0)$  et de la base canonique.

On peut de même décrire les sous-espaces affines de  $E$  en terme de coordonnées cartésiennes. Limitons nous ici au cas des hyperplans affines de  $E$  i.e. aux sous-espaces affines de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

Soit  $F$  un hyperplan affine de  $E$ . Soient  $A$  un point de  $F$  et  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  une base de son espace directeur  $\vec{F}$ . Pour tout  $j = 1, \dots, n - 1$ , notons  $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$  les coordonnées de  $v_j$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$  : on a

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i.$$

Posons  $\theta(A) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Lemme 10.17.** *Soit  $M$  un point de  $E$  tel que  $\theta(M) = (x_1, \dots, x_n)$ . Le point  $M$  appartient à  $F$  si et seulement si la matrice de taille  $(n, n)$*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & x_1 - \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & x_n - \alpha_n \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul.

Démonstration : Le point  $M$  est dans  $F$  si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  appartient à  $\overrightarrow{F}$  (lemme 10.2), ce qui se traduit par la condition de l'énoncé.

### Exemples 10.3.

Supposons  $n = 2$  i.e. que  $E$  soit un plan affine.

1) Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $E$ . Posons  $\theta(A) = (a_1, a_2)$  et  $\theta(B) = (b_1, b_2)$ . Soit  $M$  un point de  $E$  tel que  $\theta(M) = (x, y)$ . Alors,  $M$  appartient à la droite  $\langle A, B \rangle$  si et seulement si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

est nul, autrement dit, si l'on a

$$(9) \quad x(b_2 - a_2) + y(a_1 - b_1) + (a_2b_1 - a_1b_2) = 0.$$

C'est l'équation cartésienne de la droite  $\langle A, B \rangle$  dans le repère  $\mathcal{R} = (O, (u_1, u_2))$ . Notons que  $A$  et  $B$  étant distincts, on a  $a_1 \neq b_1$  ou bien  $a_2 \neq b_2$ . De plus, l'équation de la direction de  $\langle A, B \rangle$  dans la base  $(u_1, u_2)$  est  $x(b_2 - a_2) + y(a_1 - b_1) = 0$ . C'est l'équation homogène i.e. «sans second membre» associée à (9). Inversement :

**Lemme 10.18.** Soient  $a, b, c$  des réels tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , et  $D$  l'ensemble des points  $M$  de  $E$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  dans le repère  $\mathcal{R}$  vérifiant la relation

$$ax + by + c = 0.$$

Alors,  $D$  est la droite de  $E$  passant par le point  $(-\frac{c}{a}, 0)$  si  $a \neq 0$ , ou  $(0, -\frac{c}{b})$  si  $b \neq 0$ , et de direction la droite engendrée par le vecteur  $bu_1 - au_2$ .

Démonstration : Supposons par exemple  $a \neq 0$ . Le point  $A$  de coordonnées  $(-\frac{c}{a}, 0)$  est sur  $D$  et  $\alpha_A(D)$  est la droite de  $\overrightarrow{E}$  engendrée par  $bu_1 - au_2$ , d'où l'assertion.

2) Soient deux droites de  $E$  d'équations  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$ . Elles sont parallèles si et seulement si le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$  est nul. En effet, leurs directions sont les mêmes si et seulement si les vecteurs de coordonnées  $(b, -a)$  et  $(b', -a')$  sont colinéaires.

3) Considérons des droites de  $E$  d'équations

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{et} \quad a''x + b''y + c'' = 0.$$

Vérifions qu'elles sont concourantes ou parallèles si et seulement si la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul. Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$f((x, y, z)) = (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z).$$

La matrice de  $f$  dans la base canonique est  $\mathcal{M}$ . Supposons que son déterminant soit nul. Dans ce cas, le noyau de  $f$  n'est pas nul. S'il existe  $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$  avec  $z \neq 0$ , les droites sont concourantes en le point de coordonnées  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ , sinon elles sont parallèles. Inversement, si elles sont concourantes, il existe un élément de la forme  $(x, y, 1) \in \text{Ker}(f)$ , et si elles sont parallèles il existe un élément non nul  $(x, y, 0) \in \text{Ker}(f)$ . Dans les deux cas  $f$  n'est pas injective, d'où  $\det(\mathcal{M}) = 0$ .

## 5. Endomorphismes affines - Points fixes

Soit  $E$  un espace affine. Une application affine de  $E$  dans  $E$ , i.e. un endomorphisme de  $E$ , qui fixe un point est entièrement déterminée par son application linéaire associée. On a vu qu'il existe des endomorphismes de  $E$  sans points fixes, par exemple les translations de vecteurs non nuls, et d'autres ayant un unique point fixe comme les homothéties de rapport distinct de 1.

**Proposition 10.3.** *Soit  $f : E \rightarrow E$  une application affine. Soit  $A$  un point de  $E$ . L'application  $f$  possède un point fixe si et seulement si  $\overrightarrow{Af(A)}$  appartient à l'image de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$ . L'ensemble des points fixes de  $f$  est vide ou bien est un sous-espace affine de direction le noyau de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$ .*

Démonstration : Soient  $M$  un point de  $E$ . On a

$$(10) \quad \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}).$$

Si  $M$  est un point fixe de  $f$ , on obtient

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MA}) - \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{MA}),$$

donc  $\overrightarrow{Af(A)}$  est dans l'image de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$ . Inversement, supposons qu'il existe  $u \in \overrightarrow{E}$  tel que  $(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}})(u) = \overrightarrow{Af(A)}$ . Posons  $M = A + (-u)$ . Compte tenu de (10), on a

$$\overrightarrow{Mf(M)} = u + \overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{f}(u) = 0,$$

et  $M$  est donc un point fixe de  $f$ .

Notons alors  $F$  l'ensemble des points fixes de  $f$  et supposons  $F$  non vide. Prenons pour  $A$  un point fixe de  $f$  et vérifions que l'on a

$$F = \left\{ M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}) \right\}.$$

Cela prouvera l'égalité  $\alpha_A(F) = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}})$  et établira le résultat. Soit  $M$  un point de  $F$ . D'après (10) on a

$$0 = \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}),$$

donc  $\overrightarrow{AM}$  est dans le noyau de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$ . Inversement, si  $M$  est un point de  $E$  tel que  $\overrightarrow{AM}$  soit dans le noyau de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$ , on obtient en utilisant (10) l'égalité  $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Af(A)} = 0$ , d'où  $M = f(M)$  i.e.  $M$  est dans  $F$ .

Dans le cas où  $f$  possède des points fixes, le sous-espace affine formé de ses points fixes s'appelle l'axe de  $f$ .

**Corollaire 10.3.** *Supposons  $E$  de dimension finie. Soit  $f : E \rightarrow E$  une application affine telle que 1 ne soit pas une valeur propre de  $\overrightarrow{f}$ . Alors  $f$  possède un unique point fixe.*

Démonstration : D'après l'hypothèse faite,  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$  est injectif, donc est aussi surjectif car  $E$  est de dimension finie. L'ensemble des points fixes de  $f$  n'est donc pas vide (prop. 10.3). Puisque le noyau de  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{E}}$  est nul, la dimension du sous-espace affine formé des points fixes de  $f$  est nulle, il est donc réduit à un point.

**Exemple 10.4.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par

$$f((x, y, z)) = (2x + 5y + z - 2, 3x + 7y + 4z - 1, x + y - 3z + 7).$$

D'après le corollaire 10.2,  $f$  est l'application affine de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $f((0, 0, 0)) = (-2, -1, 7)$ , dont l'application linéaire associée est représentée dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique, qui est  $X^3 - 6X^2 - 33X - 11$ , n'admet pas 1 comme racine. Par suite,  $f$  possède un unique point fixe. On vérifie que c'est le point

$$\left(-\frac{19}{7}, \frac{34}{49}, \frac{61}{49}\right).$$

Considérons des sous-espaces affines  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $\overrightarrow{F}$  et  $\overrightarrow{G}$  soient des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\overrightarrow{E}$ . D'après le corollaire 10.1  $F \cap G$  est réduit à un

point. Un endomorphisme de  $E$  qui fixe les points de  $F$  est entièrement déterminé par la restriction à  $\vec{G}$  de son application linéaire associée. On va définir des endomorphismes de  $E$  dont  $F$  soit exactement l'ensemble des points fixes.

**Définition 10.16.** Soient  $f : E \rightarrow E$  une application affine et  $\lambda$  un nombre réel.

1) (**Affinité**) On dit que  $f$  est l'affinité de base  $F$ , parallèlement à  $G$  et de rapport  $\lambda$ , si la condition suivante est satisfaite : on a

$$(11) \quad f(M) = M \quad \text{pour tout } M \in F \quad \text{et} \quad \vec{f}(u) = \lambda u \quad \text{pour tout } u \in \vec{G}.$$

2) (**Projection**) Si la condition (11) est réalisée avec  $\lambda = 0$ , on dit que  $f$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

3) (**Symétrie**) Si la condition (11) est réalisée avec  $\lambda = -1$ , on dit que  $f$  est la symétrie d'axe  $F$  parallèlement à  $G$ .

### Remarques 10.3.

1) Il existe un unique endomorphisme de  $E$  réalisant la condition (11).

2) Si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , l'image de  $p$  est  $F$ . En effet, soient  $M$  un point de  $E$  et  $A$  un point de  $F$ . On a  $\overrightarrow{AM} = u + v$  où  $u \in \vec{F}$  et  $v \in \vec{G}$ . On a ainsi  $\vec{p}(\overrightarrow{AM}) = \vec{p}(u) = u$ , d'où  $\overrightarrow{Ap(M)} = u$  et  $p(M)$  appartient donc à  $F$ .

Avec les notations précédentes :

**Lemme 10.19.** Supposons que  $f$  vérifie la condition (11) avec  $\lambda \neq 1$ . Alors  $F$  est l'ensemble de ses points fixes.

Démonstration : Soit  $M$  un point de  $E$  tel que  $f(M) = M$ . Soit  $A$  un point de  $F$ . D'après l'hypothèse faite sur  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$ , il existe  $u \in \vec{F}$  et  $v \in \vec{G}$  tels que  $\overrightarrow{AM} = u + v$ . Par ailleurs, on a

$$\overrightarrow{AM} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \vec{f}(u) + \vec{f}(v) = u + \lambda v.$$

Il en résulte que  $(\lambda - 1)v = 0$ , d'où  $v = 0$ . Ainsi  $\overrightarrow{AM}$  appartient à  $\vec{F}$ , et  $A$  étant un point de  $F$ , il en est de même de  $M$  (lemme 10.2).

### Exemples 10.5.

Soient  $D_1$  et  $D_2$  les droites affines de  $\mathbb{R}^2$  d'équations  $2x + 3y = 5$  et  $x + y = 2$  respectivement. Les droites vectorielles  $\vec{D}_1$  et  $\vec{D}_2$ , ont pour équations

$$2x + 3y = 0 \quad \text{et} \quad x + y = 0.$$

Elles sont supplémentaires car  $u = (-3, 2)$  et  $v = (1, -1)$  sont respectivement des bases de  $\vec{D}_1$  et  $\vec{D}_2$  et ces vecteurs ne sont pas colinéaires.



1) Vérifions que la symétrie  $f$  d'axe  $D_1$  parallèlement à  $D_2$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par l'égalité

$$f((x, y)) = (5x + 6y - 10, -4x - 5y + 10).$$

Tout d'abord, l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ainsi définie est affine et la matrice de  $\vec{f}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{f}(u) = u$  et  $\vec{f}(v) = -v$ . Par ailleurs, le point  $A = (1, 1)$  appartient à  $D_1$  et  $f(A) = A$ . Pour tout  $M \in D_1$  on a donc  $f(M) = M$ , et la condition (11) est satisfaite avec  $F = D_1$ ,  $G = D_2$  et  $\lambda = -1$ .

2) Vérifions que la projection  $p$  sur  $D_1$  parallèlement à  $D_2$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$p((x, y)) = (3x + 3y - 5, -2x - 2y + 5).$$

Cette application est affine et la matrice de  $\vec{p}$  dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ . On a  $\vec{p}(u) = u$ ,  $\vec{p}(v) = 0$  et  $p(A) = A$ , d'où notre assertion.

## 6. Mesure algébrique

Soit  $D$  une droite affine. On va définir la notion de mesure algébrique sur  $D$ , ou sur  $\vec{D}$ , relativement à une base de  $\vec{D}$ . Soit  $e$  un vecteur de base de  $\vec{D}$ . Pour tous points  $P$  et  $Q$  sur  $D$ , il existe un unique nombre réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{PQ} = \lambda e$ .

**Définition 10.17.** On dit que  $\lambda$  est la mesure algébrique du vecteur  $\overrightarrow{PQ}$  relativement à  $e$ . On note  $\lambda = \overline{PQ}$ .

La mesure algébrique d'un vecteur de  $\vec{D}$  n'a de sens que si l'on s'est donné une base de  $\vec{D}$ . En effet, si on change  $e$  en  $\alpha e$ , où  $\alpha$  est un réel non nul, la mesure algébrique du vecteur  $\overrightarrow{PQ}$ , relativement au vecteur de base  $\alpha e \in \vec{D}$ , est alors divisée par  $\alpha$ . Cela étant, si  $P, Q, R$  et  $S$  sont des points de  $D$  tels que  $R$  soit distinct de  $S$ , alors le rapport

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}},$$

ne dépend pas de la base choisie de  $\vec{D}$ .

**Lemme 10.20.** Soit  $D'$  une droite affine et  $f : D \rightarrow D'$  un isomorphisme de  $D$  sur  $D'$ . Pour tous points  $P, Q, R$  et  $S$  sur  $D$  tels que  $R \neq S$ , on a

$$\frac{\overline{f(P)f(Q)}}{\overline{f(R)f(S)}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}.$$

Démonstration : L'application  $\vec{f} : \vec{D} \rightarrow \vec{D}'$  est un isomorphisme linéaire de  $\vec{D}$  sur  $\vec{D}'$ . Ainsi  $\vec{f}(e) = e'$  est un vecteur de base de  $\vec{D}'$ . Posons

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda e \quad \text{et} \quad \overrightarrow{RS} = \mu e.$$

Les égalités

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \lambda e' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f(R)f(S)} = \vec{f}(\overrightarrow{RS}) = \mu e',$$

entraînent alors l'assertion.

La notion de mesure algébrique permet de définir celle de segment :

**Définition 10.18.** Soient  $A$  et  $B$  des points distincts de  $D$ . On appelle segment d'extrémités  $A$  et  $B$ , l'ensemble

$$[A, B] = \left\{ M \in D \mid \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \in [0, 1] \right\}.$$

**Remarque 10.4.** L'application  $f : [A, B] \rightarrow [0, 1]$  définie pour tout  $M \in [A, B]$  par

$$f(M) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}},$$

est une bijection de  $[A, B]$  sur  $[0, 1]$ . En effet, si  $f(M) = f(M')$ , vu les égalités

$$\overrightarrow{AM} = \overline{AM}e \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM'} = \overline{AM'}e,$$

on obtient  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$ , puis  $M = M'$ , donc  $f$  est injective. Par ailleurs, si  $\lambda$  est un élément de  $[0, 1]$ , il existe  $M \in D$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overline{AB}e$ . Puisque  $\overline{AM} = \lambda \overline{AB}$ , le point  $M$  appartient à  $[A, B]$  et  $f(M) = \lambda$ , donc  $f$  est surjective.

## 7. Théorème de Thalès

Thalès de Milet est né à Milet vers l'an 625 et est décédé vers l'an 547 avant J.-C. Soit  $E$  un espace affine de dimension finie.

**Théorème 10.1 (Thalès).** Soient  $H_1, H_2$  et  $H_3$  trois hyperplans distincts et parallèles de  $E$ . Soient  $D$  et  $D'$  des droites non parallèles à ces hyperplans. Posons

$$H_i \cap D = \{A_i\} \quad \text{et} \quad H_i \cap D' = \{B_i\} \quad (1 \leq i \leq 3).$$

On a l'égalité

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}.$$

On notera que la direction des  $H_i$  et celle de chacune des droites sont supplémentaires, donc les intersections  $H_i \cap D$  et  $H_i \cap D'$  sont réduites à un point. Par ailleurs, les rapports  $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}}$  et  $\frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_1B_3}}$  sont non nuls et bien définis car les  $H_i$  sont distincts.

Démonstration : Soit  $p$  la projection sur  $D'$  parallèlement aux  $H_i$ . Par définition,  $p$  laisse fixe les points de  $D'$  et  $\vec{p}$  est nulle sur  $\vec{H_i}$ . Pour tout  $M \in H_i$ , le vecteur  $\overrightarrow{A_iM}$  appartient à  $\vec{H_i}$ . On a donc

$$\vec{p}(\overrightarrow{A_iM}) = \overrightarrow{p(A_i)p(M)} = 0,$$

d'où  $p(A_i) = p(M)$  et  $p$  est constante sur  $H_i$ . Puisque l'on a  $p(B_i) = B_i$  et que  $B_i$  est sur  $H_i$ , il en résulte que

$$(12) \quad p(A_i) = B_i.$$

Par ailleurs,  $p$  induit un morphisme affine de  $D$  dans  $D'$  (remarques 10.3, alinéa 2). On a  $\vec{p}(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{B_1B_2} \neq 0$ . Ainsi  $\vec{p}$  est un isomorphisme de  $\vec{D}$  sur  $\vec{D'}$ , et  $p$  est donc un isomorphisme de  $D$  sur  $D'$ . La condition (12) et le lemme 10.20 entraînent alors le résultat.

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 10.4.** *Supposons que  $E$  soit un plan affine. Soit  $\{A, B, C\}$  un triangle de  $E$ . Soient  $M$  un point de  $\langle A, B \rangle$  distinct de  $A$  et  $B$ , et  $N$  un point de  $\langle A, C \rangle$  distinct de  $A$  et  $C$ . Les droites  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle M, N \rangle$  sont parallèles si et seulement si on a l'égalité*

$$(13) \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AN}}.$$

Dans ce cas, on a alors

$$(14) \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AN}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{MN}}.$$

Démonstration : Si les droites  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle M, N \rangle$  sont parallèles, le fait que l'on ait l'égalité (13) résulte du théorème de Thalès. Inversement, supposons que cette égalité soit réalisée. Il existe des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que l'on ait

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AN}.$$

D'après l'hypothèse faite, on a  $\alpha = \beta$ . Par ailleurs, on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \beta(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN})$ , ce qui conduit à l'égalité

$$\overrightarrow{BC} = \beta \overrightarrow{MN}.$$

Cela prouve que  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle M, N \rangle$  sont parallèles et que  $\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \beta$ , d'où l'égalité (14) et le résultat.

## 8. Barycentres

Soit  $E$  un espace affine. Considérons un système fini de points pondérés de  $E$ , autrement dit, une famille de couples  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ , indexée par un ensemble fini  $I$ , où  $A_i \in E$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . On lui associe l'application  $\varphi : E \rightarrow \vec{E}$ , appelée fonction vectorielle de Leibniz relative à ce système, définie par

$$(15) \quad \varphi(M) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{pour tout } M \in E.$$

**Théorème 10.2.** 1) L'application  $\varphi$  est affine. Son application linéaire associée  $\vec{\varphi}$  de  $\vec{E}$  à valeurs dans  $\vec{E}$  est

$$\vec{\varphi} = -\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) \text{Id}_{\vec{E}}.$$

2) Si la somme des  $\alpha_i$  est nulle,  $\varphi$  est constante.

3) Supposons que la somme des  $\alpha_i$  ne soit pas nulle. Dans ce cas, il existe un unique point  $G \in E$  tel que  $\varphi(G) = 0$ . Pour tout  $M \in E$ , on a alors l'égalité

$$(16) \quad \overrightarrow{MG} = \frac{\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum \alpha_i}.$$

Démonstration : Soient  $M$  et  $N$  des points de  $E$ . D'après l'égalité (15), on a

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \varphi(N) - \varphi(M) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} - \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)} = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{NM},$$

ce qui entraîne la première assertion.

Si la somme des  $\alpha_i$  est nulle, on a ainsi  $\vec{\varphi} = 0$  et  $\varphi$  est constante (exemples 10.2).

Supposons  $\sum \alpha_i \neq 0$ . Dans ce cas,  $\vec{\varphi}$  est une bijection de  $\vec{E}$ , par suite  $\varphi$  est une bijection de  $E$  sur  $\vec{E}$  (prop. 10.1). Il existe donc un unique point  $G \in E$  tel que  $\varphi(G) = 0$ . On a

$$\varphi(M) = \varphi(M) - \varphi(G) = \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{GM}) = -\left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{GM} = \left(\sum \alpha_i\right) \overrightarrow{MG},$$

d'où l'égalité (16).

Avec les notations ci-dessus :

**Définition 10.19.** Supposons  $\sum \alpha_i \neq 0$ . Le point  $G$  est appelé le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ , ou des  $A_i$  affectés des coefficients, ou des masses,  $\alpha_i$ . Si pour tout  $i \in I$  on a  $\alpha_i = 1$ , le point  $G$  s'appelle le centre de gravité ou l'isobarycentre des  $A_i$ .

**Remarques 10.5.**

Supposons  $\sum \alpha_i \neq 0$ .

1) Par définition, le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  est donc l'unique point  $G \in E$  vérifiant l'égalité

$$(17) \quad \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

2) Supposons que  $E$  soit un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On a  $E = \overrightarrow{E}$ . Dans ce cas, les notions de barycentre et de moyenne se confondent. En effet, en prenant  $M = 0$  dans la relation (16) (le neutre additif de  $E$ ), on obtient

$$G = \frac{\sum \alpha_i A_i}{\sum \alpha_i},$$

et  $G$  est donc la moyenne des  $A_i$  affectés des coefficients  $\alpha_i$ .

3) Si l'on modifie les coefficients  $\alpha_i$  par  $\lambda \alpha_i$ , où  $\lambda$  est un nombre réel non nul, le barycentre du système obtenu ne change pas. En prenant  $\lambda = \left(\sum \alpha_i\right)^{-1}$ , on peut ainsi supposer dans une étude de barycentre que la somme des coefficients du système vaut 1.

**Définition 10.20.** Soient  $A$  et  $B$  des points de  $E$ . Le centre de gravité de  $A$  et  $B$  s'appelle le milieu du bipoint  $(A, B)$ . Autrement dit, le milieu de  $(A, B)$  est le point  $G$  de  $E$  tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 0.$$

## 9. Propriétés des barycentres

Soient  $I$  un ensemble fini et  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  un système de points pondérés de  $E$ . On suppose que l'on a  $\sum \alpha_i \neq 0$ . Soit  $G$  le barycentre de ce système.

**Proposition 10.5 (Associativité des barycentres).** Soit  $J$  une partie de  $I$  vérifiant la condition

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \neq 0.$$

Soit  $G'$  le barycentre du système  $(A_j, \alpha_j)_{j \in J}$ . Soit  $G''$  le barycentre du système formé des points pondérés

$$\left(G', \sum_{j \in J} \alpha_j\right) \quad \text{et} \quad (A_k, \alpha_k) \quad \text{où } k \text{ parcourt } I - J.$$

Alors, on a  $G = G''$ .

Démonstration : Compte tenu de la condition (17), on a l'égalité

$$\left(\sum_{j \in J} \alpha_j\right) \overrightarrow{G''G'} + \sum_{k \in I-J} \alpha_k \overrightarrow{G''A_k} = 0.$$

En utilisant la relation de Chasles, on en déduit que

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \left(\overrightarrow{G''A_j} + \overrightarrow{A_jG'}\right) + \sum_{k \in I-J} \alpha_k \overrightarrow{G''A_k} = 0.$$

Par définition de  $G'$ , on a

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{A_jG'} = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$\sum_{j \in J} \alpha_j \overrightarrow{G''A_j} + \sum_{k \in I-J} \alpha_k \overrightarrow{G''A_k} = \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{G''A_i} = 0.$$

D'après le caractère d'unicité du barycentre (relation (17)), on obtient  $G = G''$ .

**Corollaire 10.4.** *Le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas si l'on remplace certains des points par leur barycentre, en lui affectant pour masse la somme des masses affectées aux points considérés (ce qui sous-entend que cette somme n'est pas nulle).*

**Exemple 10.6.** Soient  $A, B, C$  trois points distincts de  $E$ . Notons  $P$  (resp.  $Q, R$ ) le milieu de  $(B, C)$  (resp.  $(C, A), (A, B)$ ). Le centre de gravité de  $A, B, C$  est le barycentre de  $(A, 1)$  et  $(P, 2)$ , ou de  $(B, 1)$  et  $(Q, 2)$ , ou de  $(C, 1)$  et  $(R, 2)$ .

**Proposition 10.6 (Barycentres et sous-espaces affines).** 1) Soit  $F$  un sous-espace affine de  $E$ . Tout barycentre de points de  $F$  appartient à  $F$ .

2) Soit  $X$  une partie non vide  $E$ . Le sous-espace affine engendré par  $X$  est l'ensemble des barycentres des points de  $X$ .

Démonstration : 1) Soient  $I$  un ensemble fini,  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  un système de points pondérés de  $F$  et  $G$  son barycentre. Soit  $M$  un point de  $F$ . Pour tout  $i$ ,  $\overrightarrow{MA_i}$  appartient à

l'espace directeur  $\overrightarrow{F}$  de  $F$ . D'après la relation (16), il en résulte que  $\overrightarrow{MG}$  est dans  $\overrightarrow{F}$ . Par suite,  $G$  est dans  $F$  (lemme 10.2).

2) Soit  $\langle X \rangle$  le sous-espace affine de  $E$  engendré par  $X$ . Il contient  $X$ . D'après la première assertion, tout barycentre de points de  $X$  appartient à  $\langle X \rangle$ .

Inversement, soit  $M$  un point de  $\langle X \rangle$ . Il s'agit de montrer que  $M$  est le barycentre de certains points de  $X$  affectés de masses convenables. Soit  $A_0$  un point fixé de  $X$ . D'après le lemme 10.7, l'espace directeur de  $\langle X \rangle$  est le sous-espace vectoriel de  $\overrightarrow{E}$  engendré par les vecteurs  $\overrightarrow{A_0N}$  où  $N$  parcourt  $X$ . Le vecteur  $\overrightarrow{A_0M}$  est dans  $\overrightarrow{\langle X \rangle}$ . Il existe donc un entier  $n \geq 1$ , des points  $A_1, \dots, A_n$  de  $X$  et des nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que l'on ait

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

En posant

$$\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

on obtient

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0.$$

Cela prouve que  $M$  est le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ , d'où le résultat.

**Corollaire 10.5.** Soient  $\{A, B, C\}$  un triangle de  $E$  et  $P$  (resp.  $Q, R$ ) le milieu de  $(B, C)$  (resp.  $(C, A), (A, B)$ ). Les droites  $\langle A, P \rangle$ ,  $\langle B, Q \rangle$  et  $\langle C, R \rangle$ , i.e. les médianes du triangle, sont concourantes au centre de gravité de  $A, B, C$ .

Démonstration : Soit  $G$  le centre de gravité de  $A, B, C$ . C'est le barycentre de  $(A, 1)$  et  $(P, 2)$  (exemple 10.6), donc  $G$  appartient à  $\langle A, P \rangle$  (assertion 1 de la prop. 10.6). Par le même argument on déduit que  $G$  est sur  $\langle B, Q \rangle$  et  $\langle C, R \rangle$ , d'où l'assertion.

**Proposition 10.7 (Barycentres et applications affines).** Soient  $F$  un espace affine et  $f : E \rightarrow F$  une application affine. Soit  $G$  le barycentre d'un système  $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$  de points pondérés de  $E$ . Alors  $f(G)$  est le barycentre du système  $(f(A_i), \alpha_i)_{i \in I}$

Démonstration : On a

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

On obtient

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = 0,$$

d'où l'assertion.

## 10. Coordonnées barycentriques

On suppose dans ce paragraphe que  $E$  est un espace affine de dimension finie  $n$ . Soit  $(A_0, \dots, A_n)$  un repère affine de  $E$ .

**Proposition 10.8.** *Soit  $M$  un point de  $E$ .*

- 1) *Il existe  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $M$  soit le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ .*
- 2) *Un tel élément de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est unique à une constante multiplicative non nulle près. Autrement dit, si  $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  est tel que  $M$  soit le barycentre du système  $(A_i, \beta_i)$ , il existe un réel  $\lambda \neq 0$  tel que pour tout  $i = 0, \dots, n$ , on ait  $\alpha_i = \lambda \beta_i$ .*

Démonstration : 1) Le sous-espace affine de  $E$  engendré par les points  $A_i$  est  $E$  tout entier (déf. 10.7). D'après la proposition 10.6, tout point de  $E$  est donc barycentre des  $A_i$  affectés de masses convenables, d'où l'assertion d'existence.

2) Soient  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  et  $(\beta_0, \dots, \beta_n)$  des éléments de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $M$  soit le barycentre des systèmes  $(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(A_i, \beta_i)_{0 \leq i \leq n}$ , et que l'on ait

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = \sum_{i=0}^n \beta_i = 1.$$

Il suffit de prouver que pour tout  $i$ , on a  $\alpha_i = \beta_i$ . On a les égalités

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n \beta_i \overrightarrow{MA_i} = 0.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n \beta_i (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}) = 0,$$

ce qui conduit aux égalités

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^n \beta_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

La famille  $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1 \leq i \leq n}$  étant une base de  $\overrightarrow{E}$ , on a donc  $\alpha_i = \beta_i$  pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , puis  $\alpha_0 = \beta_0$ , d'où le résultat.

**Corollaire 10.6.** *Pour tout point  $M$  de  $E$ , il existe un unique élément  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que l'on ait*

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1,$$



et que  $M$  soit le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

**Définition 10.21.** Soient  $M$  un point de  $E$  et  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $M$  soit le barycentre du système  $(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ . On dit que  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est un système de coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère affine  $(A_0, \dots, A_n)$ , étant entendu qu'il est unique à une constante multiplicative non nulle près. On dit que ce système est normalisé si la somme des  $\alpha_i$  vaut 1.

On dira aussi par abus que le point  $M$  a pour coordonnées barycentriques  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  sans autre précision. Il y a unicité de son système de coordonnées barycentriques normalisé dans le repère donné (cor. 10.6).

**Remarque 10.6.** Soient  $M$  un point de  $E$  et  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  son système de coordonnées barycentriques normalisé dans le repère  $(A_0, \dots, A_n)$ . D'après la formule (16), on a l'égalité

$$(18) \quad \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0 A_i},$$

de sorte que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est le système de coordonnées cartésiennes du vecteur  $\overrightarrow{A_0 M}$  dans la base  $(\overrightarrow{A_0 A_i})_{1 \leq i \leq n}$ .

## 11. Cas d'un plan affine

On suppose dans ce paragraphe que  $E$  est un plan affine. Soit  $(A, B, C)$  un repère affine de  $E$ . Étant donnés des vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\vec{E}$ , on notera ci-dessous  $\det(u, v)$  le déterminant du système  $(u, v)$  dans la base  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  de  $\vec{E}$ .

**Proposition 10.9.** Soient  $M$  un point de  $E$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$  son système de coordonnées barycentriques normalisé dans le repère  $(A, B, C)$ . On a

$$\alpha = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \quad \beta = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \quad \text{et} \quad \gamma = \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).$$

Démonstration : Vérifions que l'on a les égalités

$$(19) \quad w = \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \overrightarrow{MA} + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \overrightarrow{MB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \overrightarrow{MC} = 0,$$

$$(20) \quad \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 1,$$

ce qui prouvera le résultat (cor. 10.6). Pour cela, on remarque que

$$\det(w, \overrightarrow{MA}) = \det(w, \overrightarrow{MB}) = \det(w, \overrightarrow{MC}) = 0.$$

On en déduit que  $w$  est colinéaire à  $\overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{MB}$  et  $\overrightarrow{MC}$ . Si  $w$  était non nul, les vecteurs  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  seraient colinéaires, donc  $M$  serait sur la droite  $\langle A, B \rangle$ . De même,  $M$  appartiendrait aux droites  $\langle A, C \rangle$  et  $\langle B, C \rangle$ , et les points  $A, B, C$  seraient alignés, d'où une contradiction et l'égalité (19). Par ailleurs, en utilisant les égalités

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC},$$

on obtient la condition (20).

**Proposition 10.10.** *Soient  $P, Q, R$  des points de  $E$  de coordonnées barycentriques respectivement  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$  dans le repère  $(A, B, C)$ . Les points  $P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si la matrice*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul.

Démonstration : On peut supposer que la somme des coordonnées barycentriques de  $P, Q$  et  $R$  vaut 1. Notons alors  $d$  ce déterminant. On constate que  $d$  est le déterminant des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 1 & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' - \beta & \gamma' - \gamma \\ 0 & \beta'' - \beta & \gamma'' - \gamma \end{pmatrix},$$

d'où l'égalité

$$d = (\beta' - \beta)(\gamma'' - \gamma) - (\gamma' - \gamma)(\beta'' - \beta).$$

Compte tenu de (18) on a

$$\overrightarrow{AP} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AQ} = \beta' \overrightarrow{AB} + \gamma' \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AR} = \beta'' \overrightarrow{AB} + \gamma'' \overrightarrow{AC}.$$

Il en résulte que l'on a

$$\overrightarrow{PQ} = (\beta' - \beta) \overrightarrow{AB} + (\gamma' - \gamma) \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PR} = (\beta'' - \beta) \overrightarrow{AB} + (\gamma'' - \gamma) \overrightarrow{AC}.$$

Par suite, on a  $d = 0$  si et seulement si  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$  sont colinéaires i.e. si  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

**Exemple 10.7 (Droite de Newton).** Soient  $P, Q, R$  des points de  $E$  chacun distinct de  $A, B, C$ . On suppose que  $P$  (resp.  $Q, R$ ) appartient à la droite  $\langle B, C \rangle$  (resp.  $\langle A, C \rangle$ ,  $\langle A, B \rangle$ ). Vérifions que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si les milieux des bipoints  $(A, P)$ ,  $(B, Q)$  et  $(C, R)$  le sont aussi. Si tel est le cas, cette droite des milieux s'appelle la droite de Newton de  $(P, Q, R)$  relative à  $(A, B, C)$ .

Il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $P$  ait pour coordonnées barycentriques dans le repère  $(A, B, C)$  le triplet

$$(0, 1, \alpha).$$

En effet,  $P$  appartient à la droite  $\langle B, C \rangle$ , donc c'est le barycentre de  $B$  et  $C$  affectés de masses convenables (prop. 10.6, assertion 2). Autrement dit, il existe des réels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels  $P$  ait pour coordonnées barycentriques  $(0, \gamma_1, \gamma_2)$  (prop. 10.8, assertion 2). Compte tenu des égalités

$$\gamma_1 \overrightarrow{PB} + \gamma_2 \overrightarrow{PC} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_1 + \gamma_2 \neq 0,$$

et du fait que  $P$  soit distinct de  $B$  et  $C$ , on a  $\gamma_1 \gamma_2 \neq 0$ . On obtient alors notre assertion en posant  $\alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ . De même, il existe des réels  $\beta$  et  $\gamma$  tels que  $Q$  et  $R$  aient pour coordonnées barycentriques dans le repère  $(A, B, C)$  respectivement

$$(\beta, 0, 1) \quad \text{et} \quad (1, \gamma, 0).$$

On a alors les égalités

$$\overrightarrow{PB} + \alpha \overrightarrow{PC} = 0, \quad \beta \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{RA} + \gamma \overrightarrow{RB} = 0.$$

Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul (prop. 10.10), autrement dit, si l'on a

$$(21) \quad \alpha\beta\gamma = -1.$$

Notons  $I$  (resp.  $J$ ,  $K$ ) le milieu de  $(A, P)$  (resp.  $(B, Q)$ ,  $(C, R)$ ). On a

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IP} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \alpha \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \alpha(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IC}) = 0.$$

En tenant compte du fait que  $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IA}$ , on obtient

$$(1 + \alpha)\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \alpha\overrightarrow{IC} = 0,$$

donc  $I$  a pour coordonnées barycentriques  $(1 + \alpha, 1, \alpha)$  dans le repère  $(A, B, C)$ . De même, on vérifie que  $J$  et  $K$  ont pour coordonnées barycentriques respectivement  $(\beta, 1 + \beta, 1)$  et  $(1, \gamma, 1 + \gamma)$ . Par ailleurs, le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 & \alpha \\ \beta & 1 + \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix}$$

vaut  $2(\alpha\beta\gamma + 1)$ . Il est donc nul si  $\alpha\beta\gamma = -1$ , d'où l'assertion (prop. 10.10 et (21)).

## 12. Droites en coordonnées barycentriques dans le plan

Soient  $E$  un plan affine et  $(A, B, C)$  un repère affine de  $E$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux points distincts de  $E$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha', \beta', \gamma')$  des coordonnées barycentriques de  $P$  et  $Q$  dans ce repère. Un point  $M$  de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$  appartient à la droite  $\langle P, Q \rangle$  si et seulement si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

est nul (prop. 10.10). Cette condition signifie que l'on a

$$(22) \quad ux + vy + wz = 0 \quad \text{avec} \quad u = \beta'\gamma - \beta\gamma', \quad v = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma, \quad w = \alpha'\beta - \alpha\beta'.$$

Les coefficients  $u$ ,  $v$  et  $w$  ne sont pas tous égaux. En effet, supposons  $u = v = w$ . Puisque  $x + y + z \neq 0$ , on a alors  $u = v = w = 0$ , autrement dit, les triplets  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et  $(\alpha', \beta', \gamma')$  sont proportionnels i.e.  $P = Q$ .

**Définition 10.22.** On dit que la relation (22) est l'équation barycentrique de la droite  $\langle P, Q \rangle$  dans le repère  $(A, B, C)$ .

Inversement :

**Lemme 10.21.** Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  des nombres réels non tous égaux. L'ensemble des points de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$  dans le repère  $(A, B, C)$  tels que  $ux + vy + wz = 0$  est une droite affine.

Démonstration : Notons  $D$  l'ensemble des points  $M \in E$  de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$  tels que  $ux + vy + wz = 0$ . On peut par exemple supposer  $w \neq 0$ .

Supposons  $u \neq w$  et  $v \neq w$ . Les points  $R$  et  $S$  de coordonnées  $(w, 0, -u)$  et  $(0, w, -v)$  sont distincts et appartiennent à  $D$ . On déduit alors de la proposition 10.10 qu'un point de  $E$  est sur  $D$  si et seulement si il est aligné avec  $R$  et  $S$ . Par suite, on a  $D = \langle R, S \rangle$ .

Supposons  $u = w$ . On a alors  $u \neq v$  et les points  $R$  et  $S$  de coordonnées  $(0, -u, v)$  et  $(1, -u, v - 1)$  sont distincts et sont sur  $D$ . On vérifie comme ci-dessus que  $D$  est la droite passant par  $R$  et  $S$ .

Si  $v = w$ , alors  $D$  est la droite passant par les points  $(v, -u, 0)$  et  $(-v, u - 1, 1)$ .

**Proposition 10.11.** Soient  $D$  et  $D'$  des droites d'équations barycentriques

$$ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad u'x + v'y + w'z = 0.$$

1) On a  $D = D'$  si et seulement si il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $(u, v, w) = \lambda(u', v', w')$ .

2) Les droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul.

Démonstration : 1) Soient  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  les formes linéaires définies par

$$f((x, y, z)) = ux + vy + wz \quad \text{et} \quad g((x, y, z)) = u'x + v'y + w'z.$$

Supposons  $D = D'$ . D'après le lemme 10.21, il existe alors deux vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^3$  qui sont dans le noyau de  $f$  et  $g$ . Les noyaux de  $f$  et  $g$  étant de dimension 2, ils sont donc égaux engendrés par ces deux vecteurs. Dans le dual de  $\mathbb{R}^3$ , le sous-espace vectoriel orthogonal à  $\text{Ker } f$  est de dimension 1, engendré par  $f$ . Il en est de même pour  $g$ , donc  $f$  et  $g$  sont colinéaires. Il existe donc un réel  $\lambda$  non nul tel que  $f = \lambda g$ . Cela entraîne la condition annoncée vu que  $(u, v, w)$  et  $(u', v', w')$  sont les coordonnées de  $f$  et  $g$  dans la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . L'implication réciproque est immédiate.

2) L'équivalence est vraie si  $D = D'$ . Supposons  $D \neq D'$ . Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire représentée dans les bases canoniques par la matrice

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la première assertion,  $h$  est de rang 2 et son noyau est de dimension 1. Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  une base de  $\text{Ker } h$ . Posons  $s = x_0 + y_0 + z_0$ .

2.1) Si l'on a  $s = 0$ , il n'existe pas de triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  vérifiant les égalités

$$(23) \quad ux + vy + wz = 0, \quad u'x + v'y + w'z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 1.$$

Dans ce cas,  $D \cap D'$  est vide, autrement dit,  $D$  et  $D'$  sont parallèles.

2.2) Supposons  $s \neq 0$ . Le point  $(x, y, z) = (\frac{x_0}{s}, \frac{y_0}{s}, \frac{z_0}{s})$  est alors l'unique triplet de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant la condition (23) et les droites  $D, D'$  sont donc concourantes en ce point.

Par ailleurs, on a  $s = 0$  si et seulement si la matrice intervenant dans l'énoncé n'est pas inversible i.e. si son déterminant est nul, d'où le résultat.

**Remarque 10.7.** Avec les notations de la proposition précédente, comme on l'a constaté dans sa démonstration, si  $s$  n'est pas nul, les droites  $D$  et  $D'$  sont concourantes au point de coordonnées barycentriques  $(x_0, y_0, z_0)$ , où  $(x_0, y_0, z_0)$  est une base du noyau de la matrice  $\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}$ .

**Exemple 10.8.** Les droites  $D$  et  $D'$  d'équations barycentriques

$$x + 3y + 5z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + 7z = 0,$$

sont concourantes au point de coordonnées  $(1, 3, -2)$ .

**Proposition 10.12.** Soient  $D$ ,  $D'$  et  $D''$  des droites d'équations barycentriques

$$ux + vy + wz = 0, \quad u'x + v'y + w'z = 0 \quad \text{et} \quad u''x + v''y + w''z = 0.$$

Elles sont parallèles ou concourantes si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul.

Démonstration : Si  $D = D' = D''$  l'énoncé est vrai. On peut donc supposer que deux de ces droites sont distinctes. Notons  $\mathcal{M}$  la matrice ci-dessus et  $d$  son déterminant.

Supposons  $d = 0$ . Dans ce cas,  $\mathcal{M}$  est de rang 2 (prop. 10.11, assertion 1) et son noyau est donc une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  une base de cette droite. Si  $x_0 + y_0 + z_0 \neq 0$ , le point de coordonnées barycentriques  $(x_0, y_0, z_0)$  appartient à ces trois droites i.e. elles sont concourantes en ce point. Si  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ , elles sont parallèles deux à deux (cf. l'alinéa 2.1 de la démonstration de la prop. 10.11).

Inversement, supposons que  $D$ ,  $D'$  et  $D''$  soient parallèles ou concourantes. Si elles sont concourantes, le noyau de  $\mathcal{M}$  est non nul, donc  $d$  est nul. Supposons qu'elles soient parallèles. Les droites  $D$  et  $D'$  étant parallèles, il existe  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que l'on ait (prop. 10.11, assertion 2)

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0, \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0 \quad \text{et} \quad u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 = 0.$$

De même,  $D$  et  $D''$  étant parallèles, il existe  $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0, \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0 \quad \text{et} \quad u''x_1 + v''y_1 + w''z_1 = 0.$$

Puisque  $u$ ,  $v$  et  $w$  ne sont pas tous égaux, les plans de  $\mathbb{R}^3$  d'équations  $x + y + z = 0$  et  $ux + vy + wz = 0$  sont distincts. Leur intersection est donc une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ . Les vecteurs  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $(x_1, y_1, z_1)$  appartenant à cette droite, il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $(x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$ . On en déduit l'égalité

$$u''x_0 + v''y_0 + w''z_0 = 0.$$

Par suite, le vecteur  $(x_0, y_0, z_0)$  appartient au noyau de  $\mathcal{M}$ . Parce qu'il est non nul, on a  $d = 0$ , d'où le résultat.

### 13. Quelques théorèmes classiques

En application de ce qui précède, on va démontrer certains théorèmes classiques de géométrie affine. On considère dans ce paragraphe un plan affine  $E$ . Rappelons que l'on a défini un triangle de  $E$  comme étant un ensemble de trois points non alignés de  $E$ .

**Théorème 10.3 (Ménélaüs).** *Soit  $\{A, B, C\}$  un triangle de  $E$ . Soient  $A', B', C'$  des points, chacun distinct de  $A, B, C$ , appartenant respectivement aux droites  $\langle B, C \rangle$ ,  $\langle A, C \rangle$  et  $\langle A, B \rangle$ . Alors,  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés si et seulement si on a*

$$(24) \quad \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1.$$

Démonstration : Elle est analogue à celle de l'assertion de l'exemple 10.7. Il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $A', B', C'$  aient pour coordonnées barycentriques dans le repère  $(A, B, C)$  respectivement

$$(25) \quad (0, 1, \alpha), \quad (\beta, 0, 1) \quad \text{et} \quad (1, \gamma, 0).$$

On a les égalités

$$(26) \quad \overrightarrow{A'B} + \alpha \overrightarrow{A'C} = 0, \quad \beta \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{C'A} + \gamma \overrightarrow{C'B} = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$(27) \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\alpha, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\beta \quad \text{et} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\gamma.$$

Par ailleurs, les points  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés si et seulement si  $\alpha\beta\gamma = -1$  (formule (21)), ce qui se traduit par l'égalité (24).

**Corollaire 10.7 (Théorème du quadrilatère complet).** *Soient  $D$  et  $D'$  des droites distinctes ayant un point commun  $A$ . Soient  $B$  et  $C$  (resp.  $B'$  et  $C'$ ) des points distincts appartenant à  $D - \{A\}$  (resp.  $D' - \{A\}$ ), tels que les droites  $\langle C, B' \rangle$  et  $\langle C', B \rangle$  soient concourantes en un point  $M$ . Supposons que la droite  $\langle A, M \rangle$  soit concourante avec les droites  $\langle B, B' \rangle$  et  $\langle C, C' \rangle$ . Posons*

$$\{N\} = \langle B, B' \rangle \cap \langle A, M \rangle \quad \text{et} \quad \{P\} = \langle C, C' \rangle \cap \langle A, M \rangle.$$

Alors, on a

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PM}} = -1.$$

Démonstration : On applique le théorème précédent avec les triangles  $\{A, B, M\}$ ,  $\{B, M, C\}$  et  $\{A, M, C\}$ . On obtient

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PM}} \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'B}} \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'M}} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'M}} \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \frac{\overline{NM}}{\overline{NA}} = 1.$$

On en déduit le résultat en effectuant le produit de ces égalités.

On dit que le quadruplet  $(A, M, N, P)$  forme une division harmonique. L'énoncé précédent montre comment construire géométriquement des quadruplets de points alignés formant une division harmonique.

**Théorème 10.4 (De Ceva).** Soit  $\{A, B, C\}$  un triangle de  $E$ . Soient  $A', B', C'$  des points, chacun distinct de  $A, B, C$ , appartenant respectivement aux droites  $\langle B, C \rangle$ ,  $\langle A, C \rangle$  et  $\langle A, B \rangle$ . Les droites  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  et  $\langle C, C' \rangle$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a

$$(28) \quad \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1.$$

Démonstration : Reprenons les mêmes notations que (25), les égalités (26) et (27) étant alors satisfaites. Les coordonnées barycentriques de  $A, B$  et  $C$  dans le repère  $(A, B, C)$  sont respectivement  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . On en déduit que les équations barycentriques des droites  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  et  $\langle C, C' \rangle$  dans ce repère sont respectivement

$$z - \alpha y = 0, \quad x - \beta z = 0 \quad \text{et} \quad y - \gamma x = 0.$$

On vérifie que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ -\gamma & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est  $1 - \alpha\beta\gamma$ . Les formules (27) et la proposition 10.12 entraînent alors la relation (28).

**Théorème 10.5 (Desargues).** Soient  $\{A, B, C\}$  et  $\{A', B', C'\}$  des triangles de  $E$ . Supposons les conditions suivantes satisfaites :

- 1) on a  $A \neq A'$ ,  $B \neq B'$  et  $C \neq C'$ .
- 2) Les droites  $\langle A, B \rangle$ ,  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle C, A \rangle$  sont respectivement parallèles aux droites  $\langle A', B' \rangle$ ,  $\langle B', C' \rangle$  et  $\langle C', A' \rangle$ .

Alors, les droites  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  et  $\langle C, C' \rangle$  sont parallèles ou concourantes.

Démonstration : Dans le repère  $(A, B, C)$ , notons  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  et  $(c_1, c_2, c_3)$  les systèmes coordonnées barycentriques normalisés respectivement de  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . Les



équations barycentriques des droites  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  et  $\langle C, C' \rangle$  dans ce repère sont

$$a_3y - a_2z = 0, \quad b_3x - b_1z = 0 \quad \text{et} \quad c_2x - c_1y = 0.$$

D'après la proposition 10.12, on vérifie qu'elles sont parallèles ou concourantes si et seulement si on a l'égalité

$$(29) \quad a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2 = 0.$$

Les équations barycentriques des droites  $\langle A, B \rangle$ ,  $\langle B, C \rangle$  et  $\langle C, A \rangle$  sont respectivement

$$z = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

De même, celles des droites  $\langle A', B' \rangle$ ,  $\langle B', C' \rangle$  et  $\langle C', A' \rangle$  sont respectivement

$$x(a_2b_3 - a_3b_2) + y(a_3b_1 - a_1b_3) + z(a_1b_2 - b_1a_2) = 0,$$

$$x(b_2c_3 - b_3c_2) + y(b_3c_1 - b_1c_3) + z(b_1c_2 - c_1b_2) = 0,$$

$$x(a_2c_3 - a_3c_2) + y(a_3c_1 - a_1c_3) + z(a_1c_2 - c_1a_2) = 0.$$

En utilisant la seconde condition, on obtient les relations (cf. prop. 10.11)

$$b_3(a_1 + a_2) - a_3(b_1 + b_2) = 0,$$

$$c_1(b_2 + b_3) - b_1(c_2 + c_3) = 0,$$

$$a_2(c_1 + c_3) - c_2(a_1 + a_3) = 0.$$

En utilisant les égalités  $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$ , on déduit que  $a_3 = b_3$ ,  $c_1 = b_1$  et  $a_2 = c_2$ . Par suite, l'égalité (29) est satisfaite, d'où le résultat.

**Théorème 10.6 (Pappus).** *Soient  $D$  et  $D'$  des droites distinctes de  $E$ . Soient  $A, B, C$  des points distincts de  $D$  et  $A', B', C'$  des points distincts de  $D'$ . On suppose que ces six points sont distincts de l'éventuel point d'intersection de  $D$  et  $D'$ . Alors, en supposant qu'ils existent, les points*

$$M = \langle B, C' \rangle \cap \langle C, B' \rangle, \quad N = \langle C, A' \rangle \cap \langle A, C' \rangle, \quad P = \langle A, B' \rangle \cap \langle B, A' \rangle,$$

*sont alignés.*

Démonstration : Les points  $A, B'$  et  $C$  n'étant pas alignés, le triplet  $(A, B', C)$  est un repère affine de  $E$ . Les point  $A'$  et  $C'$  n'appartiennent pas à la droite  $\langle A, B' \rangle$  et  $B$  est sur la droite  $\langle A, C \rangle$ . Il existe donc des réels  $a, a', b, b', c, c'$  tels que

$$(a, a', 1), \quad (b, 0, b') \quad \text{et} \quad (c, c', 1),$$

soient des coordonnées barycentriques respectivement de  $A'$ ,  $B$  et  $C'$  dans  $(A, B', C)$ . Par ailleurs, les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  étant alignés, on a l'égalité (cf. prop. 10.10)

$$a = c.$$

Les équations barycentriques des droites  $\langle A, B' \rangle$ ,  $\langle C, B' \rangle$  et  $\langle C, A' \rangle$  sont respectivement

$$z = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad a'x - ay = 0.$$

On vérifie que celles des droites  $\langle B, A' \rangle$ ,  $\langle B, C' \rangle$  et  $\langle A, C' \rangle$  sont

$$a'b'x + (b - ab')y - a'bz = 0, \quad b'c'x + (b - b'c)y - bc'z = 0 \quad \text{et} \quad y - c'z = 0.$$

Il en résulte que des coordonnées barycentriques de  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont (cf. remarque 10.7)

$$(0, -bc', b'c - b), \quad (ac', a'c', a') \quad \text{et} \quad (ab' - b, a'b', 0).$$

Le déterminant de ces trois vecteurs dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $a'bc'b'(c - a)$ . Il est nul (car  $a = c$ ), d'où le résultat (prop. 10.10).