

## Chapitre III - Séries numériques

### Table des matières

1. Généralités	1
2. Séries à termes positifs	3
3. Séries de Riemann	10
4. Critère de Cauchy - Applications	13
5. Séries absolument convergentes	16
6. Développement décimal d'un nombre réel	17
7. Familles sommables de nombres réels positifs	24

### 1. Généralités

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres complexes. Le problème fondamental qui se pose ici est de donner un sens à la somme des  $u_n$ , somme comportant une infinité de termes. On considère pour cela la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On appelle série de terme général  $u_n$  le couple  $((u_n), (s_n))$  formé des suites  $(u_n)$  et  $(s_n)$ . Comme il est d'usage, on note plus simplement  $\sum u_n$  la série de terme général  $u_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre complexe  $s_n$  s'appelle la somme partielle d'indice  $n$ , ou la  $n$ -ième somme partielle, de la série.

**Définition 3.1.** Si la suite  $(s_n)$  est convergente, on dit que la série  $\sum u_n$  est convergente. Dans ce cas, si  $s$  est la limite de  $(s_n)$ , on écrit

$$s = \sum_{n \geq 0} u_n,$$

et l'on dit que  $s$  est la somme de la série. Dans le cas contraire, on dit que la série  $\sum u_n$  est divergente.

**Remarque 3.1.** On ne change pas la nature d'une série, i.e. le fait qu'elle soit convergente ou divergente, en modifiant un nombre fini de ses termes. En effet, si deux suites

complexes ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors pour tout  $n$  assez grand les différences entre leurs sommes partielles d'indices  $n$  sont constantes. Cela étant, dans le cas de la convergence, la somme peut s'en trouver modifiée. Comme on l'a déjà signalé dans le chapitre II, il arrive en pratique que  $u_n$  ne soit défini que pour  $n$  assez grand, souvent pour  $n \geq n_0$  avec  $n_0 = 1$  ou  $n_0 = 2$ . Là encore, on parle de la série de terme général  $u_n$ , on la note  $\sum u_n$ , et sa  $n$ -ième somme partielle  $s_n$  n'est définie que pour les entiers  $n \geq n_0$  en posant  $s_n = u_{n_0} + \cdots + u_n$ . La définition 3.1 est alors inchangée, dans le cas de la convergence la somme de la série de terme général  $u_n$  est la limite de la suite  $(s_n)$ , et la théorie générale vaut sans modification.

**Lemme 3.1.** *Pour que la série  $\sum u_n$  soit convergente, il est nécessaire que la suite  $(u_n)$  soit convergente de limite 0.*

Démonstration : Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $u_n = s_n - s_{n-1}$ . Si  $\sum u_n$  est convergente i.e. si la suite  $(s_n)$  l'est, la suite  $(s_n - s_{n-1})$  est convergente de limite 0, d'où l'assertion.

Supposons la série  $\sum u_n$  convergente de somme  $s$ . Fixons un entier  $p \in \mathbb{N}$  et posons

$$(1) \quad r_p = s - s_p.$$

On dit que  $r_p$  est le reste de rang  $p$  de la série  $\sum u_n$ . En posant pour tout  $n \geq p + 1$

$$r_p(n) = \sum_{k=p+1}^n u_k,$$

on a l'égalité

$$r_p(n) = s_n - s_p,$$

de sorte que l'on a, quand  $n$  tend vers l'infini,

$$(2) \quad \lim r_p(n) = r_p.$$

### Exemples 3.1.

1) Soit  $z$  un nombre complexe. La série géométrique  $\sum z^n$  est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ . Dans le cas où  $|z| < 1$ , on a

$$(3) \quad \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

En effet, pour tout  $z \neq 1$ , on a l'égalité (somme d'une progression géométrique)

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Supposons  $|z| < 1$ . La suite  $(z^n)$  est alors convergente de limite 0, d'où l'égalité (3). Si l'on a  $|z| \geq 1$ , la suite  $(z^n)$  ne tend pas vers 0 et la série est divergente (lemme 3.1).

2) La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente, bien que son terme général tende vers 0. On a en effet démontré dans le chapitre précédent que la suite de ses sommes partielles n'est pas de Cauchy.

## 2. Séries à termes positifs

Ce paragraphe est exclusivement réservé aux séries à termes réels positifs. Comme conséquence du théorème 2.1, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs. Pour que la série  $\sum u_n$  soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée. Sa somme est alors la borne supérieure de l'ensemble de ses sommes partielles.*

Démonstration : Dire que la série  $\sum u_n$  est convergente signifie que la suite  $(s_n)$  de ses sommes partielles l'est, et dans ce cas, sa somme est la limite de  $(s_n)$ . Les  $u_n$  étant positifs, la suite  $(s_n)$  est croissante. Le théorème 2.1 entraîne alors l'assertion.

### Exemple 3.2.

**Corollaire 3.1.** *Pour tout nombre réel  $x \geq 0$ , la série de terme général  $\frac{x^n}{n!}$  est convergente.*

Démonstration : Soit  $x$  un réel positif. Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

où rappelons que  $0! = 1$ . La suite  $(s_n)$  est croissante. Il reste à vérifier qu'elle est majorée. D'après l'alinéa 6 des exemples 2.1, la suite  $(\frac{(2x)^n}{n!})$  est convergente (de limite nulle), elle est donc majorée (lemme 2.2). Autrement dit, il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on ait

$$\frac{(2x)^k}{k!} \leq M \quad \text{i.e.} \quad \frac{x^k}{k!} \leq \frac{M}{2^k}.$$

En utilisant la formule (4), on obtient

$$s_n \leq M \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2M,$$

ce qui établit le résultat.

On démontrera plus loin que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  la série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est convergente. Cela étant, le corollaire 3.1 permet de définir la fonction exponentielle usuelle sur l'ensemble des réels positifs en posant

$$(5) \quad \exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Pour  $x = 1$ , on retrouve la définition du célèbre nombre  $e$  :

$$(6) \quad e = \exp(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}.$$

En fait, cette série est très rapidement convergente. Plus précisément, notons  $s_n$  la  $n$ -ième somme partielle de la série  $\sum \frac{1}{n!}$ . Fixons un entier  $p \geq 1$  et posons pour tout  $n \geq p + 1$ ,

$$r_p(n) = \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k!}.$$

La suite  $(r_p(n))$  est convergente et l'on a (formules (1) et (2))

$$\lim r_p(n) = e - s_p > 0,$$

l'inégalité ayant lieu vu que  $e$  est un majorant de  $s_{p+1}$  et que  $s_{p+1} > s_p$ . Afin d'estimer l'erreur commise en remplaçant  $e$  par  $s_p$ , remarquons que l'on a

$$r_p(n) = \frac{1}{(p+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(p+1)!} \left( 1 + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{(p+2)(p+3) \cdots n} \right),$$

ce qui entraîne

$$r_p(n) \leq \frac{1}{(p+1)!} \left( 1 + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{(p+1)^{n-p-1}} \right) < \frac{1}{p! p},$$

d'après la formule (4). On obtient ainsi

$$(7) \quad 0 < e - s_p \leq \frac{1}{p! p}.$$

Par exemple, en explicitant les inégalités

$$s_{10} < e < s_{10} + \frac{1}{10! \times 10},$$

on vérifie que 2,7182818 est une valeur approchée de  $e$  à  $10^{-7}$  près par défaut.

Signalons une application de (7) :

**Corollaire 3.2.** *Le nombre  $e$  est irrationnel.*

Démonstration : Supposons que  $e$  soit dans  $\mathbb{Q}$ . Posons  $e = \frac{a}{b}$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels. Considérons la suite  $(x_n)$  définie par

$$x_n = n!(e - s_n).$$

Pour tout  $n \geq b$ , on déduit de (7) que  $x_n$  est un entier naturel non nul plus petit que  $\frac{1}{n}$ , ce qui conduit à une contradiction.

On a ainsi explicité une suite convergente de nombres rationnels qui ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ . Hermite en 1873 a en fait démontré que  $e$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}$ , i.e. qu'il n'existe pas de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  dont  $e$  soit racine.

Voyons maintenant d'autres critères de convergence pour les séries à termes positifs.

**Proposition 3.1 (Principe de comparaison).** *Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de nombres réels positifs. Supposons qu'il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait*

$$u_n \leq v_n \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

- 1) Si la série  $\sum v_n$  est convergente, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
- 2) Si la série  $\sum u_n$  est divergente, il en est de même de la série  $\sum v_n$ .

Démonstration : Compte tenu de la remarque 3.1, on peut supposer  $n_0 = 0$ . Soient  $(U_n)$  et  $(V_n)$  les suites des sommes partielles associées respectivement à  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . Pour tout  $n$ , on a  $U_n \leq V_n$ . Si la suite  $(V_n)$  converge, elle est majorée et tel aussi le cas de  $(U_n)$ . D'après le théorème 3.1, la suite  $(U_n)$  est donc convergente. De même, si la suite  $(U_n)$  est divergente, elle n'est pas majorée, et il en est de même de  $(V_n)$ , qui est donc divergente.

**Corollaire 3.3.** *Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites de nombres réels positifs. Supposons que que  $v_n$  soit non nul pour tout  $n$  assez grand.*

- 1) Si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est convergente de limite 0 et si la série  $\sum v_n$  est convergente, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
- 2) Si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers  $+\infty$  et si la série  $\sum v_n$  est divergente, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .
- 3) Si la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est convergente de limite  $\ell > 0$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Démonstration : 1) Il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $\frac{u_n}{v_n} < 1$ , i.e.  $u_n < v_n$ , d'où l'assertion (prop. 3.1).

2) Il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $\frac{u_n}{v_n} > 1$  i.e.  $u_n > v_n$ , d'où l'assertion (*loc. cit.*).

3) Parce que  $\ell > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$-\frac{\ell}{2} < \frac{u_n}{v_n} - \ell < \frac{\ell}{2} \quad \text{d'où} \quad v_n \frac{\ell}{2} < u_n < v_n \frac{3\ell}{2},$$

ce qui entraîne le résultat (*loc. cit.*).

**Proposition 3.2 (Règle de d'Alembert).** Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que la suite  $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$  est convergente de limite  $\ell$ .

1) Si  $\ell < 1$  la série  $\sum u_n$  est convergente.

2) Si  $\ell > 1$  la série  $\sum u_n$  est divergente.

Démonstration : 1) Supposons  $\ell < 1$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < \ell + \varepsilon < 1$ . Par ailleurs, il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} < (\ell + \varepsilon)u_n.$$

On en déduit par récurrence que l'on a pour tout  $n \geq n_0$

$$u_n \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} = (\ell + \varepsilon)^n \frac{u_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}.$$

Puisque l'on a  $0 < \ell + \varepsilon < 1$ , la série géométrique  $\sum (\ell + \varepsilon)^n$  est convergente (exemples 3.1). Il en est donc de même de  $\sum u_n$  (prop. 3.1).

2) Supposons  $\ell > 1$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\ell - \varepsilon > 1$ . Soit  $n_0$  un entier tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \ell - \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} > (\ell - \varepsilon)u_n.$$

Pour tout  $n \geq n_0$  on obtient

$$u_n \geq (\ell - \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} = (\ell - \varepsilon)^n \frac{u_{n_0}}{(\ell - \varepsilon)^{n_0}}.$$

La série géométrique  $\sum (\ell - \varepsilon)^n$  étant divergente, il en est de même de  $\sum u_n$  (*loc. cit.*).

**Proposition 3.3 (Règle de Cauchy).** Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})$  est convergente de limite  $\ell$ .

1) Si  $\ell < 1$  la série  $\sum u_n$  est convergente.

2) Si  $\ell > 1$  la série  $\sum u_n$  est divergente.

Démonstration : 1) Supposons  $\ell < 1$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < \ell + \varepsilon < 1$ , et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$\sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad u_n < (\ell + \varepsilon)^n.$$

La série  $\sum (\ell + \varepsilon)^n$  étant convergente, il en est de même de la série  $\sum u_n$ .

2) Supposons  $\ell > 1$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\ell - \varepsilon > 1$ , et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$\sqrt[n]{u_n} > \ell - \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad u_n > (\ell - \varepsilon)^n.$$

La série géométrique  $\sum (\ell - \varepsilon)^n$  étant divergente, il en est de même de  $\sum u_n$ .

### Remarques 3.2

1) Avec les notations utilisées précédemment, les règles de d'Alembert et de Cauchy ne permettent pas de déterminer la nature d'une série si  $\ell = 1$ . Par exemple, la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente et on verra dans le paragraphe suivant que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente. Cependant, pour ces deux séries, dans l'utilisation des règles de d'Alembert et de Cauchy, on a  $\ell = 1$ .

2) Soit  $\sum u_n$  une série de nombres réels strictement positifs. En fait, si la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est convergente de limite 1, il en est de même de la suite  $(\sqrt[n]{u_n})$ , de sorte qu'il est alors inutile d'essayer de conclure par la règle de Cauchy. Plus précisément :

**Lemme 3.2.** *Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels strictement positifs. Si la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est convergente de limite  $\ell$ , alors la suite  $(\sqrt[n]{u_n})$  est aussi convergente de limite  $\ell$ .*

Démonstration: Supposons  $\ell > 0$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel tel que  $0 < \varepsilon < \ell$ . Il existe un entier  $p$  tel que l'on ait pour tout  $n \geq p$

$$u_n(\ell - \varepsilon) \leq u_{n+1} \leq u_n(\ell + \varepsilon).$$

Il en résulte par récurrence que pour tout  $n \geq p$  on a les inégalités

$$u_p(\ell - \varepsilon)^{n-p} \leq u_n \leq u_p(\ell + \varepsilon)^{n-p},$$

d'où

$$\sqrt[n]{\frac{u_p}{(\ell - \varepsilon)^p}}(\ell - \varepsilon) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{\frac{u_p}{(\ell + \varepsilon)^p}}(\ell + \varepsilon).$$

Par ailleurs, on a vu que pour tout  $a > 0$  la suite  $(\sqrt[n]{a})$  est convergente de limite 1. Il existe donc des entiers  $n_1$  et  $n_2$  tels que l'on ait

$$\sqrt[n]{\frac{u_p}{(\ell - \varepsilon)^p}} > 1 - \frac{\varepsilon}{\ell - \varepsilon} \quad \text{pour tout } n \geq n_1,$$

$$\sqrt[n]{\frac{u_p}{(\ell + \varepsilon)^p}} < 1 + \frac{\varepsilon}{\ell + \varepsilon} \quad \text{pour tout } n \geq n_2.$$

Pour tout  $n \geq \text{Max}(p, n_1, n_2)$ , on a donc

$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon,$$

d'où l'assertion.

Supposons  $\ell = 0$ . La démonstration est la même en considérant seulement des majorations. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $p$  tel que l'on ait pour tout  $n \geq p$

$$0 < u_{n+1} \leq u_n \varepsilon.$$

Pour tout  $n \geq p$  on obtient

$$0 < u_n \leq u_p \varepsilon^{n-p} \quad \text{d'où} \quad 0 < \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{\frac{u_p}{\varepsilon^p}} \varepsilon.$$

Il existe un entier  $n_1$  tel que l'on ait

$$\sqrt[n]{\frac{u_p}{\varepsilon^p}} < 2 \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

Pour tout  $n \geq \text{Max}(p, n_1)$ , on a donc  $0 < \sqrt[n]{u_n} \leq 2\varepsilon$ , et le résultat.

3) La réciproque du lemme 3.2 est fausse, comme on le constate en considérant la suite de terme général

$$u_n = 2 + (-1)^n,$$

pour laquelle on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \text{ ou } 3 \quad \text{et} \quad \lim \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

(Pour la dernière égalité, considérer les suites extraites  $(\sqrt[2n]{u_{2n}})$  et  $(\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}})$  qui sont convergentes de limite 1.)

4) On peut aussi démontrer que pour toute suite  $(u_n)$  de nombres réels strictement positifs, on a l'implication

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \implies \lim \sqrt[n]{u_n} = +\infty.$$

En effet, soit  $A > 0$ . Il existe un entier  $p$  tel que l'on ait pour tout  $n \geq p$  l'inégalité  $u_{n+1} \geq Au_n$ . Il en résulte que pour tout  $n \geq p$ , on a

$$u_n \geq A^{n-p} u_p.$$

On en déduit que pour tout  $n \geq p$ ,

$$\sqrt[n]{u_n} \geq A \sqrt[n]{\frac{u_p}{A^p}}.$$

Dès que  $n$  est assez grand ( $n \geq n_1$ ) on a

$$\sqrt[n]{\frac{u_p}{A^p}} \geq \frac{1}{2},$$

d'où pour  $n \geq \text{Max}(p, n_1)$  l'inégalité  $\sqrt[n]{u_n} \geq \frac{A}{2}$ , et l'implication.



### Exemples 3.3.

1) Soit  $p$  un entier naturel. Posons  $u_n = \frac{n^p}{n!}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . La série  $\sum u_n$  est convergente. En effet, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \frac{1}{n+1},$$

qui tend vers 0, d'où l'assertion d'après la règle de d'Alembert. Une formule de récurrence permet de calculer la somme de cette série. En effet, posons

$$S_p = \sum_{k \geq 0} \frac{k^p}{k!}.$$

On sait que  $S_0 = e$ . Vérifions que l'on a

$$(8) \quad S_{p+1} = \sum_{i=0}^p C_p^i S_i.$$

Soit  $S_p(n)$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum \frac{k^p}{k!}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$S_{p+1}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{k^{p+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^{p+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^p}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^p C_p^i k^i,$$

et l'on obtient

$$S_{p+1}(n) = \sum_{i=0}^p C_p^i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^i}{k!},$$

ce qui, par passage à la limite, entraîne (8). Par exemple, on a  $S_1 = e$ ,  $S_2 = 2e$ ,  $S_3 = 5e$ .

2) Soit  $a$  un nombre réel tel que  $0 < a < 1$ . Soit  $(u_n)$  la suite définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_{2n} = a^n \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 2a^n.$$

La règle de Cauchy permet de montrer que la série  $\sum u_n$  est convergente. En effet, on a

$$\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad \sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = 2^{\frac{1}{2n+1}} a^{\frac{n}{2n+1}}.$$

La suite  $(2^{\frac{1}{2n+1}})$  est convergente de limite 1, car elle est extraite de la suite  $(\sqrt[n]{2})$  qui converge vers 1. Par ailleurs, on a

$$a^{\frac{n}{2n+1}} = \frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{4n+2}}},$$

d'où l'on déduit que la suite  $(a^{\frac{n}{2n+1}})$  est convergente de limite  $\sqrt{a}$ . Les suites  $(\sqrt[2n]{u_{2n}})$  et  $(\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}})$  convergent donc vers  $\sqrt{a}$ , ce qui entraîne que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge

aussi vers  $\sqrt{a}$ , d'où l'assertion car  $\sqrt{a} < 1$ . Remarquons que la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car les quotients  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  valent alternativement 2 et  $\frac{a}{2}$ .

### 3. Séries de Riemann

Une série de Riemann est une série de la forme  $\sum \frac{1}{n^r}$  où  $r$  est un nombre rationnel, et plus généralement un nombre réel, ce qui suppose avoir définie  $n^r$  pour  $r$  réel et pas seulement rationnel, ce que l'on fera plus loin. Prouvons ici l'énoncé suivant (valable aussi pour  $r \in \mathbb{R}$ ).

**Théorème 3.2.** *Soit  $r$  un nombre rationnel. La série  $\sum \frac{1}{n^r}$  est convergente pour  $r > 1$  et divergente pour  $r \leq 1$ .*

On utilise pour cela deux résultats utiles indépendamment de ce théorème.

**Lemme 3.3.** *Soient  $(a_n)$  une suite complexe et  $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. Posons pour tout  $p \in \mathbb{N}$*

$$b_p = a_{\rho(p)+1} + a_{\rho(p)+2} + \cdots + a_{\rho(p+1)}.$$

- 1) *Si la série  $\sum a_n$  est convergente, il en est de même de la série  $\sum b_n$ .*
- 2) *Si les  $a_n$  sont des nombres réels positifs, alors les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont de même nature.*

Démonstration : 1) Soient  $(A_n)$  et  $(B_n)$  les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a alors

$$(9) \quad B_n = \sum_{p=0}^n b_p = A_{\rho(n+1)} - A_{\rho(0)}.$$

Si  $(A_n)$  est convergente, il en est de même de sa suite extraite  $(A_{\rho(n+1)})$ , et donc aussi de la suite  $(B_n)$ , d'où la première assertion.

2) Supposons que les  $a_n$  soient des réels positifs et que la série  $\sum a_n$  soit divergente. La suite  $(A_n)$  est alors croissante. Parce que l'on a  $n \leq \rho(n) < \rho(n+1)$ , on déduit de (9) les inégalités

$$A_n \leq A_{\rho(n)} \leq A_{\rho(n+1)} = B_n + A_{\rho(0)}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse, la suite  $(A_n)$  est divergente. Puisqu'elle est croissante, elle n'est donc pas majorée (th. 2.1). Il en résulte que la suite  $(B_n)$  est aussi divergente, sinon elle serait majorée et  $(A_n)$  aussi, d'où le résultat.

**Lemme 3.4 (Critère de condensation de Cauchy).** Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de nombre réels positifs. Posons

$$v_n = 2^n u_{2^n}.$$

Alors, les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Démonstration : Soit  $n$  un entier naturel. On a

$$\frac{v_{n+1}}{2} = 2^n u_{2^{n+1}}.$$

La suite  $(u_n)$  étant décroissante,  $u_{2^{n+1}}$  est plus petit que les  $2^n$  termes

$$u_{2^n}, u_{2^n+1}, u_{2^n+2}, \dots, u_{2^{n+1}-1}.$$

On a donc

$$\frac{v_{n+1}}{2} \leq u_{2^n} + u_{2^n+1} + \dots + u_{2^{n+1}-1} = w_n.$$

Puisque  $(u_n)$  est décroissante, on a aussi

$$w_n \leq 2^n u_{2^n} = v_n,$$

d'où les inégalités

$$v_{n+1} \leq 2w_n \leq 2v_n.$$

D'après le lemme 3.3, utilisé avec l'application  $\rho(n) = 2^n - 1$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  sont de même nature. La proposition 3.1 entraîne alors le résultat.

Fin de la démonstration du théorème 3.2 : Si l'on a  $r \leq 1$ , alors  $n^r \leq n$  d'où  $\frac{1}{n^r} \geq \frac{1}{n}$ . On a vu que la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente, donc il en est de même de la série  $\sum \frac{1}{n^r}$  (prop. 3.1). Supposons  $r > 1$ . Posons

$$v_n = 2^n \frac{1}{(2^n)^r}.$$

On a

$$v_n = q^n \quad \text{avec} \quad q = \frac{1}{2^{r-1}}.$$

Parce que l'on a  $q < 1$ , la série géométrique  $\sum q^n$  est convergente. D'après le lemme 3.4 (avec  $u_n = \frac{1}{n^r}$ ), il en est de même de la série  $\sum \frac{1}{n^r}$ , d'où le théorème.

### Remarques 3.3.

1) On peut déduire du lemme 3.3 que la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente. En effet, supposons qu'elle soit convergente. Dans ce cas, il en est de même de la série

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

dont le terme général  $v_n$  est

$$v_n = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

(lemme 3.3 utilisé avec l'application  $\rho(n) = 2^n$ ). Le nombre  $v_n$  est une somme de  $2^n$  termes chacun  $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$ . Par suite, on a

$$v_n \geq \frac{1}{2},$$

en particulier  $(v_n)$  ne converge pas vers 0, d'où une contradiction.

2) Il existe des suites  $(u_n)$  de nombres réels positifs telles que la série  $\sum u_n$  soit convergente et que la série  $\sum 2^n u_{2^n}$  soit divergente. Tel est le cas de la suite  $(u_n)$  où

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{si } n \text{ est une puissance de } 2 \quad \text{et} \quad u_n = 0 \text{ sinon.}$$

En effet, la suite  $(s_n)$  des sommes partielles de la série  $\sum u_n$  est croissante. Par ailleurs, elle est majorée, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$s_n \leq s_{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n} u_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} < 2.$$

La série  $\sum u_n$  est donc convergente. Pour autant, on a

$$\sum_{k=0}^n 2^k u_{2^k} = n + 1,$$

et la série  $\sum 2^n u_{2^n}$  est donc divergente.

### Exemples 3.4.

1) Soit  $\text{Log}$  la fonction logarithme népérien, qui sera définie dans le chapitre V. Comme conséquence du lemme 3.3 on obtient :

**Corollaire 3.4 (Séries de Bertrand).** *Soit  $r$  un nombre rationnel. La série  $\sum \frac{1}{n(\text{Log } n)^r}$  est convergente si et seulement si  $r > 1$ .*

Démonstration : Supposons  $r \leq 0$ . Pour tout  $n$  assez grand, on a

$$\frac{1}{n(\text{Log } n)^r} \geq \frac{1}{n},$$

et la série  $\sum \frac{1}{n}$  étant divergente, on obtient le résultat dans ce cas (prop. 3.1). Supposons  $r > 0$ . Posons  $u_n = \frac{1}{n(\text{Log } n)^r}$ . La fonction logarithme est croissante donc la suite  $(u_n)$  est décroissante, et ses termes sont positifs si  $n \geq 2$ . Posons  $v_n = 2^n u_{2^n}$ . On a

$$v_n = \frac{1}{n^r (\text{Log } 2)^r}.$$

Le critère de condensation et le théorème 3.2 entraînent alors l'assertion.

2) Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs telle que la série  $\sum u_n$  soit convergente. Alors la série  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$  est convergente. En effet, pour tous nombres réels  $x$  et  $y$ , on a  $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ , donc pour tout  $n$  assez grand on a

$$\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  sont convergentes, d'où l'assertion par le principe de comparaison.

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^4+1}$ . Vérifions que la série  $\sum u_n$  est convergente. On constate d'abord que les règles de d'Alembert et de Cauchy ne permettent pas de conclure, vu que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est convergente de limite 1 (cf. le lemme 3.2). Cela étant le principe de comparaison et le théorème 3.2 permettent de prouver que tel est le cas. En effet, on a

$$n^{\frac{7}{2}} u_n = \frac{n^4}{n^4+1},$$

et la suite  $(n^{\frac{7}{2}} u_n)$  est donc convergente de limite 1. Pour tout  $n$  assez grand on a donc

$$u_n < \frac{2}{n^{\frac{7}{2}}}.$$

La série de Riemann d'exposant  $\frac{7}{2}$  étant convergente, il en est de même de la série  $\sum u_n$  (prop. 3.1).

## 4. Critère de Cauchy - Applications

Le critère de Cauchy établi pour les suites complexes dans le chapitre précédent s'étend aux séries.

**Théorème 3.3 (Critère de Cauchy).** *Soit  $(u_n)$  une suite complexe. Pour que la série  $\sum u_n$  soit convergente il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait*

$$|u_p + \cdots + u_q| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n_0 \leq p \leq q.$$

Démonstration : Pour que la série  $\sum u_n$  soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit de Cauchy (th. 2.5), d'où le résultat.

Voici une conséquence de ce critère.

**Proposition 3.4 (Règle d'Abel).** Soient  $(u_n)$  une suite complexe et  $(v_n)$  une suite réelle. Supposons les conditions suivantes satisfaites :

- 1) les sommes partielles de la série  $\sum u_n$  sont bornées.
- 2) La suite  $(v_n)$  est décroissante et converge vers 0.

Alors, la série  $\sum u_n v_n$  est convergente.

Démonstration : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Soient  $p$  et  $q$  deux entier tels que  $q \geq p \geq 1$ . On a

$$\sum_{k=p}^q u_k v_k = \sum_{k=p}^q (s_k - s_{k-1}) v_k = -s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_q v_q.$$

D'après la seconde condition, les  $v_n$  sont positifs, et l'on a  $v_n \geq v_{n+1}$ . On en déduit que

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k v_k \right| \leq |s_{p-1}| v_p + |s_q| v_q + \sum_{k=p}^{q-1} |s_k| (v_k - v_{k+1}).$$

D'après la première condition, il existe un nombre réel  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $|s_n| < M$ . Il en résulte que l'on a

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k v_k \right| \leq M \left( v_p + v_q + \sum_{k=p}^{q-1} (v_k - v_{k+1}) \right) = 2M v_p.$$

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Puisque  $(v_n)$  converge vers 0, il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait  $2M v_p < \varepsilon$  pour tout  $p \geq n_0$ . Le critère de Cauchy entraîne alors le résultat.

Une série réelle est dite alternée si son terme général est de la forme  $(-1)^n u_n$  ou  $(-1)^{n+1} u_n$ , avec  $u_n$  positif.

**Corollaire 3.5 (Séries alternées).** Soit  $(u_n)$  une suite réelle décroissante et convergente de limite nulle. Alors la série  $\sum (-1)^n u_n$  est convergente. Soient  $S_n$  sa somme partielle d'indice  $n$  et  $\ell$  la limite de  $(S_n)$ . On a les inégalités

$$S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n} \quad \text{et} \quad |\ell - S_n| \leq u_{n+1}.$$

Démonstration : Le fait que la série  $\sum (-1)^n u_n$  soit convergente est une conséquence directe de la règle d'Abel. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0,$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0.$$

La suite  $(S_{2n})$  est donc décroissante et  $(S_{2n+1})$  est croissante. Par ailleurs, on a l'égalité  $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ , donc la suite  $(S_{2n+1} - S_{2n})$  est convergente de limite nulle, car par hypothèse il en est ainsi de  $(u_n)$ . Les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont donc adjacentes, d'où  $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$  (lemme 2.6). Puisque l'on a  $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$ , il en résulte les inégalités

$$|\ell - S_{2n+1}| \leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = u_{2n+2} \quad \text{et} \quad |\ell - S_{2n}| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1},$$

d'où le résultat.

### Exemples 3.5.

- 1) La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente.
- 2) Soit  $(u_n)$  une suite complexe telle que la série  $\sum nu_n$  soit convergente. Alors la série  $\sum u_n$  est convergente. Il suffit d'écrire  $u_n = \frac{1}{n}(nu_n)$  pour obtenir l'assertion.
- 3) La série  $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$  est convergente. Pour le vérifier, on remarque que l'on a

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}},$$

d'où les égalités

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n + \sqrt{n^2+1}}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n + \sqrt{n^2+1}}\right).$$

On en déduit le résultat vu que la suite de terme général  $\sin\left(\frac{\pi}{n + \sqrt{n^2+1}}\right)$  est décroissante et converge vers 0.

- 4) Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série  $\sum u_n$  soit convergente. Alors la suite  $(nu_n)$  converge vers 0.
- Soit  $\varepsilon$  réel  $> 0$ . D'après le critère de Cauchy, pour tout  $n$  assez grand on a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} < \varepsilon.$$

Parce que la suite  $(u_n)$  est décroissante, on obtient pour tout  $n$  assez grand

$$nu_{2n} < \varepsilon,$$

donc  $(nu_{2n})$  converge vers 0, et il en est de même de la suite  $(2nu_{2n})$ . Par ailleurs, on a

$$(2n+1)u_{2n+1} = 2nu_{2n+1} + u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n+1}.$$

La suite  $(u_n)$  étant convergente de limite 0, il en résulte que tel est le cas de la suite  $((2n+1)u_{2n+1})$ . Cela entraîne l'assertion.

On notera qu'il existe des séries  $\sum u_n$  divergentes pour lesquelles  $(u_n)$  soit décroissante, les  $u_n$  soient positifs et la suite  $(nu_n)$  tende vers 0, par exemple la série  $\sum \frac{1}{n \operatorname{Log} n}$ .

## 5. Séries absolument convergentes

**Définition 3.2.** Soit  $(u_n)$  une suite complexe. On dit que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Théorème 3.4.** Toute série de nombre complexes absolument convergente est convergente.

Démonstration : Soit  $(u_n)$  une suite complexe telle que la série  $\sum u_n$  soit absolument convergente. D'après le critère de Cauchy, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait

$$|u_p| + \cdots + |u_q| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n_0 \leq p \leq q.$$

On a donc les inégalités

$$|u_p + \cdots + u_q| \leq |u_p| + \cdots + |u_q| < \varepsilon,$$

ce qui d'après ce même critère entraîne que la série  $\sum u_n$  est convergente.

**Remarque 3.4.** Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Il en est ainsi de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  comme on l'a vu.

On en déduit le résultat important suivant :

**Proposition 3.5.** Soit  $z$  un nombre complexe. La série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente. Elle est en particulier convergente.

Démonstration : Le fait que cette série soit absolument convergente une conséquence directe du corollaire 3.1 (on peut aussi utiliser la règle de d'Alembert). Elle est donc convergente (th. 3.4).

Comme on l'a déjà signalé dans le cas où  $z$  est un nombre réel positif, ce résultat permet de définir la fonction exponentielle complexe,  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , en posant

$$(10) \quad \exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Afin de démontrer, avec cette définition, les propriétés attendues de cette fonction il faudrait poursuivre la théorie des séries proprement dite, ce qui n'est pas dans l'objectif de



ce cours. Nous adopterons dans le chapitre suivant une autre définition, équivalente à celle fournit par la formule (10), qui permet d'obtenir les propriétés de la fonction exponentielle avec les résultats obtenus dans le chapitre II.

## 6. Développement décimal d'un nombre réel

Rappelons que  $\mathbb{R}$  contient un sous-anneau, appelé l'anneau des nombres décimaux, qui est formé des réels  $x$  pour lesquels il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $10^k x$  soit dans  $\mathbb{Z}$ . Par exemple,  $\frac{1}{2}$  est un nombre décimal et  $\frac{1}{3}$  n'en est pas un.

Partons d'une suite  $(u_n)$  d'entiers relatifs. On suppose que l'on a

$$0 \leq u_n \leq 9 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons

$$s_n = u_0 + \frac{u_1}{10} + \cdots + \frac{u_n}{10^n}.$$

On note comme il est d'usage

$$(11) \quad s_n = u_0, u_1 \cdots u_n.$$

C'est un nombre décimal vu que  $10^n s_n$  est dans  $\mathbb{Z}$ .

**Lemme 3.5.** *La série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  est convergente.*

Démonstration : La suite  $(s_n)$  est croissante et est majorée par  $u_0 + 1$ . En effet, on a

$$s_n \leq u_0 + \frac{9}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \right) < u_0 + 1,$$

d'où le résultat (th. 3.1).

Soit  $x$  la somme de la série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  i.e. la limite de la suite  $(s_n)$ . On note

$$(12) \quad x = u_0, u_1 u_2 \cdots u_n u_{n+1} \cdots$$

Compte tenu de (11),  $x$  est la borne supérieure de l'ensemble des développements tronqués  $u_0, u_1 \cdots u_n$  (th. 3.1).

### Exemples 3.6.

1) On a l'égalité

$$(13) \quad 1 = 0,99 \cdots 99 \cdots$$

En effet, avec les notations précédentes, on a (avec  $n$  chiffres 9 après la virgule)

$$s_n = 0,9 \cdots 9 = \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^n}.$$

Il en résulte que la limite de  $(s_n)$  est (cf. (12))

$$0,99 \cdots 99 \cdots = \frac{9}{10} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

2) Vérifions que l'on a

$$(14) \quad \frac{18689}{33300} = 0,56123123123 \cdots 123 \cdots.$$

Notons  $x$  le nombre réel du second membre de (14). Par définition, en posant

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 6, \quad u_{3k} = 1, \quad u_{3k+1} = 2, \quad u_{3k+2} = 3 \quad \text{pour tout } k \geq 1,$$

$x$  est la somme de la série  $\sum \frac{u_k}{10^k}$ . D'après les formules (1) et (2), on en déduit que

$$(15) \quad x = \frac{56}{100} + \sum_{k \geq 3} \frac{u_k}{10^k}.$$

Pour tout  $k \geq 1$  posons

$$v_k = \frac{u_{3k}}{10^{3k}} + \frac{u_{3k+1}}{10^{3k+1}} + \frac{u_{3k+2}}{10^{3k+2}} = \frac{123}{10^{3k+2}}.$$

La série de terme générale  $v_n$  est convergente. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=3}^{3n+2} \frac{u_k}{10^k},$$

ce qui entraîne

$$(16) \quad \sum_{k \geq 1} v_k = \sum_{k \geq 3} \frac{u_k}{10^k}.$$

On déduit ensuite de (16) que l'on a

$$\sum_{k \geq 3} \frac{u_k}{10^k} = \frac{123}{10^5} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{10^{3k}} = \frac{123}{10^2} \times \frac{1}{10^3 - 1} = \frac{123}{99900}.$$

D'après (15) on obtient alors l'égalité (14).

L'égalité (13) montre qu'il existe des suites d'entiers  $(u_n)$  et  $(v_n)$  distinctes telles que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n$  et  $v_n$  soient compris entre 0 et 9 et que les sommes des séries  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  et  $\sum \frac{v_n}{10^n}$  soient égales. Pour pallier à cet inconvénient, on introduit la notion de développement décimal propre d'un nombre réel. Voyons de quoi il s'agit.

**Notation.** On désigne par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites d'entiers relatifs  $(u_n)$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1) pour tout  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq u_n \leq 9$ .
- 2) Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq p$  tel que  $u_n \neq 9$ .

Rappelons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ .

**Théorème 3.5.** *Soit  $x$  un nombre réel. Il existe une unique suite  $(u_n)$  dans  $\mathcal{S}$  telle que la série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  soit convergente de somme  $x$ . On a*

$$(17) \quad u_0 = E(x) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Définition 3.3.** *Avec les notations du théorème 3.5, conformément à (12), on note*

$$x = u_0, u_1 u_2 \cdots u_n u_{n+1} \cdots$$

*On dit que cette égalité est le développement décimal propre de  $x$ .*

Démonstration du théorème 3.5 : 1) Prouvons que la suite  $(u_n)$  définie par les égalités (17) appartient à  $\mathcal{S}$  et que la série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  est convergente de somme  $x$ . Cela établira l'assertion d'existence. Vérifions pour cela l'énoncé suivant :

**Lemme 3.6.** *Soit  $(x_n)$  la suite de nombres décimaux définie par*

$$x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}.$$

*Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a les inégalités*

$$(18) \quad x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

*De plus, la suite  $(x_n)$  est convergente de limite  $x$ , et l'on a*

$$(19) \quad x_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{10^k}.$$

Démonstration : Soit  $n$  un entier naturel. On a les inégalités

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1,$$

ce qui entraîne (18). La suite  $(\frac{1}{10^n})$  étant convergente de limite 0, on en déduit que  $(x_n)$  converge vers  $x$ . Par ailleurs, on a

$$\frac{u_{n+1}}{10^{n+1}} = \frac{E(10^{n+1}x)}{10^{n+1}} - \frac{E(10^n x)}{10^n} = x_{n+1} - x_n.$$

Par récurrence, on en déduit l'égalité (19).

D'après le lemme 3.6, la série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  est donc convergente de somme  $x$ .

Vérifions maintenant que  $(u_n)$  appartient à  $\mathcal{S}$ . En multipliant par 10 les inégalités

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1,$$

on obtient

$$(20) \quad 10E(10^n x) \leq 10^{n+1}x < 10E(10^n x) + 10.$$

On déduit de la première inégalité de (20) que l'on a

$$10E(10^n x) \leq E(10^{n+1}x),$$

et d'après la seconde inégalité de (20), on a

$$E(10^{n+1}x) < 10E(10^n x) + 10,$$

d'où  $0 \leq u_{n+1} < 10$ . Il reste à prouver que les  $u_n$  ne sont pas tous égaux à 9 pour  $n$  assez grand. Supposons le contraire, autrement dit, qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que l'on ait  $u_n = 9$  pour tout  $n > p$ . D'après l'égalité (19), on a

$$x_n - x_p = \sum_{k=p+1}^n \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^p} - \frac{1}{10^n}.$$

On obtient ainsi pour tout  $n > p$  l'égalité

$$x_n + \frac{1}{10^n} = x_p + \frac{1}{10^p},$$

d'où par passage à la limite quand  $n$  tend vers l'infini,

$$x = x_p + \frac{1}{10^p},$$

ce qui contredit la seconde inégalité de (18), d'où l'assertion d'existence.

2) Démontrons l'assertion d'unicité du théorème. Soit  $(v_n)$  une suite appartenant à  $\mathcal{S}$  telle que la série  $\sum \frac{v_n}{10^n}$  soit convergente de somme  $x$ . Il s'agit de vérifier que l'on a

$$(21) \quad v_0 = E(x) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Posons

$$y_n = \sum_{k=0}^n \frac{v_k}{10^k},$$

et vérifions que l'on a pour tout  $n \geq 0$  les inégalités

$$(22) \quad 0 \leq x - y_n < \frac{1}{10^n}.$$

La suite  $(y_n)$  est croissante et, par hypothèse, elle converge vers  $x$ , d'où  $y_n \leq x$ . Par ailleurs, on a (cf. la formule (2))

$$x = y_n + \sum_{k \geq n+1} \frac{v_k}{10^k}.$$

Il en résulte que l'on a

$$(23) \quad x \leq y_n + \frac{9}{10^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = y_n + \frac{1}{10^n}.$$

Supposons qu'il existe un entier  $s$  tel que l'on ait l'égalité

$$x = y_s + \frac{1}{10^s}.$$

Pour tout  $n \geq s$ , en utilisant (23), on obtient

$$(24) \quad y_n - y_s \geq \frac{1}{10^s} - \frac{1}{10^n},$$

Par ailleurs, vu que  $(v_n)$  appartient à  $\mathcal{S}$ , il existe  $t > s$  tel que l'on ait  $v_t < 9$ . On en déduit que

$$y_t - y_s = \sum_{k=s+1}^t \frac{v_k}{10^k} < \sum_{k=s+1}^t \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^s} - \frac{1}{10^t},$$

ce qui contredit (24), d'où les inégalités (22). Pour tout  $n \geq 0$ , on a donc

$$0 \leq x - \sum_{k=0}^n \frac{v_k}{10^k} < \frac{1}{10^n},$$

d'où les inégalités

$$0 \leq 10^n x - \sum_{k=0}^n 10^{n-k} v_k < 1.$$

Par suite, on a

$$(25) \quad E(10^n x) = \sum_{k=0}^n 10^{n-k} v_k.$$

Pour  $n = 0$ , on obtient  $v_0 = E(x)$ . Supposons  $n \geq 1$ . D'après (25) on a

$$10E(10^{n-1}x) = \sum_{k=0}^{n-1} 10^{n-k} v_k,$$

d'où il résulte avec (25) que l'on a

$$E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x) = v_n.$$

Cela prouve les égalités (21) et termine la démonstration du théorème.

**Corollaire 3.6.** Soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\psi(x) = (u_n)$  où  $(u_n)$  est la suite d'entiers définie par les égalités :

$$u_0 = E(x) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors  $\psi$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathcal{S}$ .

Démonstration : L'application  $\psi$  est bien définie (th. 3.5). Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\psi(x) = \psi(y)$ . Posons  $\psi(x) = (u_n)$  et  $\psi(y) = (v_n)$ . D'après l'assertion d'existence du théorème 3.5, les séries  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  et  $\sum \frac{v_n}{10^n}$  sont convergentes de sommes  $x$  et  $y$ . Puisque  $u_n = v_n$ , on a donc  $x = y$ , et  $\psi$  est injective. Par ailleurs, soit  $(u_n)$  une suite dans  $\mathcal{S}$ . La série  $\sum \frac{u_n}{10^n}$  est convergente (lemme 3.5). Soit  $x$  sa somme. D'après l'assertion d'unicité du théorème 3.5, on déduit alors que  $\psi(x) = (u_n)$ , donc  $\psi$  est surjective, d'où le résultat.

On retrouve l'énoncé suivant :

**Corollaire 3.7.** L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

Démonstration: Supposons que  $\mathbb{R}$  soit dénombrable, autrement dit, qu'il existe une bijection  $f$  de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{R}$ . En reprenant les notations du corollaire 3.6, posons

$$\psi(f(n)) = (b_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , posons

$$u_k = 0 \text{ si } b_{k,k} \neq 0 \text{ et } u_k = 1 \text{ si } b_{k,k} = 0.$$

La suite  $(u_n)$  appartient à  $\mathcal{S}$ . Puisque  $\psi$  est une surjection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathcal{S}$ , il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi(x) = (u_n)$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f(n) \neq x$ , car le  $n + 1$ -ième terme de la suite  $\psi(f(n))$ , qui est  $b_{n,n}$ , est distinct de  $u_n$ , d'où une contradiction.

Terminons ce paragraphe en précisant ce que l'on entend par approximation décimale par défaut d'un nombre réel à une précision donnée.

**Définition 3.4.** Soit  $x$  un nombre réel. L'approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut est  $\frac{E(10^n x)}{10^n}$ .

En posant  $x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ , on a (lemme 3.6)

$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}.$$

De plus, si  $x = u_0, u_1 \cdots u_n \cdots$  est le développement décimal propre de  $x$ , on a d'après (19)

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{10^k} = u_0, u_1 \cdots u_n.$$

**Lemme 3.7.** Soient  $x$  un nombre réel,  $n$  un entier naturel, et  $s$  et  $t$  des entiers tels que  $0 \leq s < t \leq 9$ . Soit  $(u_i)_{0 \leq i \leq n}$  une famille d'entiers telle que pour tout  $i \geq 1$  on ait  $0 \leq u_i \leq 9$ . Supposons que l'on ait

$$u_0, u_1 \cdots u_n s \leq x \leq u_0, u_1 \cdots u_n t.$$

Alors, l'approximation décimale de  $x$  à  $10^{-n}$  près par défaut est  $u_0, u_1 \cdots u_n$ . Autrement dit, on a

$$\frac{E(10^n x)}{10^n} = u_0, u_1 \cdots u_n.$$

Démonstration : On a

$$10^n(u_0, u_1 \cdots u_n) = 10^n \left( u_0 + \frac{u_1}{10} + \cdots + \frac{u_n}{10^n} \right) = u_0 u_1 \cdots u_n.$$

Il en résulte que l'on a

$$u_0 u_1 \cdots u_n \leq 10^n x \leq u_0 u_1 \cdots u_n + \frac{t}{10} < u_0 u_1 \cdots u_n + 1,$$

d'où  $E(10^n x) = u_0 u_1 \cdots u_n$  et l'assertion.

### Exemples 3.7.

1) L'approximation décimale de  $e$  à  $10^{-7}$  près par défaut est 2,7182818. En effet, d'après les inégalités (7), en reprenant les mêmes notations, on a

$$s_{10} < e < s_{10} + \frac{1}{10 \times 10!}.$$

On obtient

$$2,71828180 < s_{10} < e < s_{10} + \frac{1}{10 \times 10!} < 2,71828188,$$

d'où l'approximation annoncée (lemme 3.7).

2) En utilisant le premier exemple 2.3 du chapitre II, on vérifie que l'on a

$$1,7320507 < \sqrt{3} < 1,7320509.$$

L'approximation décimale de  $\sqrt{3}$  à  $10^{-6}$  près par défaut est donc 1,732050.

## 7. Familles sommables de nombres réels positifs

Considérons un ensemble dénombrable  $I$ , par exemple une partie infinie de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{N}^3$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^2$ , etc. Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres réels positifs indexée par  $I$ , autrement dit, une application de  $I$  à valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs. Comme on le signalait au début du chapitre pour les séries classiques, le problème fondamental est de donner un sens à la somme des  $u_i$ . Pour toute partie finie  $F$  de  $I$ , on notera

$$s(F) = \sum_{i \in F} u_i.$$

Soit  $V$  l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que  $x = s(F)$ . On dit que  $V$  est l'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille considérée.

**Définition 3.5.** La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est dite sommable, s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que la condition suivante soit satisfaite : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que pour toute partie finie  $G$  de  $I$  contenant  $F$ , on ait

$$|s(G) - \ell| < \varepsilon.$$

Il résulte directement de la définition qu'il existe au plus un tel nombre réel  $\ell$ .

**Notation.** Dans le cas d'existence,  $\ell$  est appelé la somme de la famille  $(u_i)_{i \in I}$ . On notera parfois

$$\ell = s(I) \quad \text{et} \quad s(I) = \sum_{i \in I} u_i.$$



Pour signifier que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, on écrit souvent que l'on a

$$\sum_{i \in I} u_i < +\infty.$$

**Proposition 3.6.** *La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $V$  est majoré. Dans ce cas, sa somme est la borne supérieure de  $V$ .*

Démonstration : Supposons la famille  $(u_i)_{i \in I}$  sommable. Soient  $\ell$  sa somme et  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que pour toute partie finie  $G$  de  $I$  contenant  $F$ , on ait

$$s(G) < \ell + \varepsilon.$$

Si  $H$  est une partie finie de  $I$ ,  $H \cup F$  est fini et contient  $F$ . Les  $u_i$  étant positifs, on a donc

$$s(H) \leq s(H \cup F) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui prouve que  $V$  est majoré. Inversement, supposons  $V$  majoré. Il possède alors une borne supérieure  $\text{Sup } V$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que

$$\text{Sup } V - \varepsilon < s(F).$$

Pour toute partie finie  $G$  de  $I$  contenant  $F$ , on a donc

$$\text{Sup } V - \varepsilon < s(F) \leq s(G) \leq \text{Sup } V,$$

d'où l'inégalité

$$|s(G) - \text{Sup } V| < \varepsilon,$$

et le fait que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  soit sommable de somme  $\text{Sup } V$ .

Dans la théorie classique des séries on considère des sommes partielles ordonnées et non des sommes partielles en vrac. Cela étant, pour les séries à termes positifs, les notions de convergence et de famille sommable coïncident. En effet :

**Proposition 3.7.** *Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) la série  $\sum u_n$  est convergente.
- 2) La famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable.
- 3) L'ensemble des sommes partielles en vrac de cette famille est majoré.

*Si ces conditions sont satisfaites, la somme de la série  $\sum u_n$  est la borne supérieure de l'ensemble de ses sommes partielles en vrac.*

Démonstration : Supposons  $\sum u_n$  convergente. La suite  $(s_n)$  de ses sommes partielles est majorée par un réel  $M$ . Soit  $F$  une partie finie non vide de  $\mathbb{N}$ . Si  $n_0$  le plus grand entier tel que  $u_{n_0}$  soit dans  $F$ , on a

$$s(F) \leq s_{n_0} \leq M,$$

de sorte que l'ensemble  $V$  des sommes partielles en vrac de la série  $\sum u_n$  est majoré par  $M$ , d'où la seconde condition (prop. 3.6). Le fait que la seconde condition entraîne la troisième est une conséquence directe de la proposition 3.6. Si la condition 3 est satisfaite, l'ensemble des sommes partielles ordonnées  $s_n$ , qui est contenu dans  $V$ , est aussi majoré, d'où la convergence de la série  $\sum u_n$ .

Soit  $S$  l'ensemble des valeurs de la suite  $(s_n)$ . Supposons  $\sum u_n$  convergente. Il s'agit de vérifier que l'on a l'égalité des bornes supérieures  $\text{Sup } S = \text{Sup } V$ . Puisque  $S$  est contenu dans  $V$ , on a  $\text{Sup } S \leq \text{Sup } V$ . Par ailleurs, soit  $x$  un élément de  $V$ . Par définition, il existe une partie finie  $F$  des  $u_n$  telle que  $x = s(F)$ . Il existe un entier  $N$  tel que  $x \leq s_N$ , d'où  $x \leq \text{Sup } S$ , puis  $\text{Sup } V \leq \text{Sup } S$  et le résultat.

Vérifions l'énoncé d'associativité suivant, qui est un cas particulier du théorème général d'associativité que l'on verra plus loin.

**Proposition 3.8.** *Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres réels positifs indexée par un ensemble dénombrable  $I$ . Supposons qu'il existe une partition de  $I$*

$$I = \bigcup_{k \geq 1} I_k,$$

*où les  $I_k$  sont des ensembles finis. Alors, la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum s(I_k)$  est convergente. Dans ce cas, on a*

$$(26) \quad \sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \geq 1} s(I_k).$$

Démonstration : Supposons  $(u_i)_{i \in I}$  sommable. Soit  $M$  sa somme. Posons

$$s_n = \sum_{k=1}^n s(I_k) \quad \text{et} \quad F = \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Les  $I_k$  étant finis, il en est de même de  $F$ . Puisqu'ils sont deux à deux disjoints, on obtient

$$(27) \quad s_n = s(F) \leq M,$$

ce qui prouve que  $(s_n)$  est majorée. Les  $u_i$  étant positifs, la suite  $(s_n)$  est croissante, donc elle est convergente i.e. la série  $\sum s(I_k)$  est convergente.

Inversement, supposons la série  $\sum s(I_k)$  convergente. Notons  $N$  sa somme. Soit  $F$  une partie finie de  $I$ . Il existe  $k_0 \geq 1$  tel que l'on ait

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k.$$

On a donc les inégalités

$$(28) \quad s(F) \leq \sum_{k=1}^{k_0} s(I_k) \leq N,$$

ce qui prouve que l'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille des  $u_i$  est majoré, autrement dit, que la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable.

Dans le cas, de la convergence,  $M$  et  $N$  étant les sommes précédemment définies, on déduit de (27) et (28) l'égalité  $M = N$ , d'où (26) et le résultat.

Illustrons ce résultat à travers deux exemples.

### Exemples 3.8.

1) Soient  $a$  un entier tel que  $1 \leq a \leq 9$  et  $I$  l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne possèdent pas  $a$  dans leur écriture décimale. Alors la famille  $(\frac{1}{n})_{n \in I}$  est sommable. De plus, on a

$$\sum_{n \in I} \frac{1}{n} < 80.$$

En effet, pour tout  $n \geq 1$ , notons  $\ell(n)$  le nombre de chiffres décimaux de  $n$ . Pour tout  $k \geq 1$ , posons

$$I_k = \{n \in I \mid \ell(n) = k\}.$$

Les  $I_k$  forment une partition de  $I$ . Pour tout  $n \in I_k$ , on a  $10^{k-1} \leq n$ . Par ailleurs, on a

$$|I_k| = 8 \times 9^{k-1}.$$

On en déduit que

$$s(I_k) = \sum_{n \in I_k} \frac{1}{n} \leq 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}.$$

Pour tout entier  $N \geq 1$ , on obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^N s(I_k) \leq \sum_{k=1}^N 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} < 80.$$

L'ensemble des sommes partielles de la série  $\sum s(I_k)$  est donc majorée par 80. La proposition 3.8 entraîne alors le résultat.

2) Étant donné un nombre rationnel  $r$ , vérifions que l'on a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^r} < +\infty \iff r > 1.$$

On notera la ressemblance de cette somme avec la série de Riemann classique. Posons  $I = \mathbb{Z}^2 - \{0\}$  et pour tout entier  $k \geq 1$

$$I_k = \left\{ (m, n) \in I \mid |m| + |n| = k \right\}.$$

On a  $|I_k| = 4k$ , et pour tout  $(m, n) \in I_k$  on a

$$\frac{k^2}{4} \leq m^2 + n^2 \leq 2k^2,$$

car  $|m|$  et  $|n|$  sont plus petits que  $k$  et l'un des deux est plus grand que  $\frac{k}{2}$ . Il en résulte que l'on a

$$\frac{4}{2^r k^{2r-1}} \leq s(I_k) \leq \frac{4^{r+1}}{k^{2r-1}}.$$

Il s'agit de déterminer la nature de la série  $\sum s(I_k)$  (prop. 3.8). Vu les inégalités ci-dessus et le principe de comparaison, la nature de cette série est la même que celle de la série  $\sum \frac{1}{k^{2r-1}}$ , dont on sait qu'elle est convergente si et seulement si  $2r - 1 > 1$  i.e.  $r > 1$ .

Passons à l'énoncé général d'associativité pour les familles de nombres réels positifs.

**Théorème 3.6.** *Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres réels positifs indexée par un ensemble dénombrable  $I$ . Supposons qu'il existe un ensemble  $J$  et une partition de  $I$*

$$I = \bigcup_{j \in J} I_j,$$

*où les  $I_j$  sont des ensembles (finis ou infinis). Alors, la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- 1) *pour tout  $j \in J$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_j}$  est sommable.*
- 2) *La famille  $(s(I_j))_{j \in J}$  est sommable.*

*Si ces conditions sont remplies, on a l'égalité*

$$(29) \quad s(I) = \sum_{j \in J} s(I_j).$$

Démonstration : Supposons  $(u_i)_{i \in I}$  sommable. Soit  $j$  un élément de  $J$ . L'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille  $(u_i)_{i \in I_j}$  est contenu dans celui des sommes partielles en vrac de la famille  $(u_i)_{i \in I}$ . Il est donc majoré, ce qui entraîne la première condition (prop. 3.6). Considérons alors une partie finie non vide  $G$  de  $J$ . Notons  $n$  son cardinal. Soit  $\varepsilon$  un nombre réel  $> 0$ . Pour tout  $j \in G$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_j}$  étant sommable, il existe par définition une partie finie  $F_j$  de  $I_j$  telle que l'on ait

$$s(I_j) < s(F_j) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Les  $F_j$  étant deux à deux disjoints, on obtient

$$\sum_{j \in G} s(I_j) \leq \sum_{j \in G} s(F_j) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{j \in G} s(F_j) = s(H),$$

où  $H$  est la réunion des  $F_j$  (qui est disjointe). Puisque  $s(I)$  majore l'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille  $(u_i)_{i \in I}$ , on a  $s(H) \leq s(I)$ , d'où

$$(30) \quad \sum_{j \in G} s(I_j) \leq s(I) + \varepsilon.$$

Le nombre  $s(I) + \varepsilon$  étant indépendant de la partie finie  $G$  de  $J$ , on obtient la condition 2.

Inversement, supposons les conditions 1 et 2 satisfaites. Notons  $S$  la somme de la famille  $(s(I_j))_{j \in J}$ . Soit  $F$  une partie finie de  $I$ . Il existe un sous-ensemble fini  $K$  de  $J$  tel que  $F$  soit contenue dans la réunion des  $I_j$  pour  $j \in K$ . On a donc

$$s(F) \leq \sum_{j \in K} s(I_j) \leq S,$$

ce qui prouve que l'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est majoré, elle est donc sommable.

Supposons alors  $(u_i)_{i \in I_j}$  sommable. Démontrons l'égalité (29). D'après (30), pour tout  $\varepsilon > 0$  le nombre  $s(I) + \varepsilon$  est un majorant de l'ensemble des sommes partielles en vrac de la famille  $(s(I_j))_{j \in J}$ . Par suite,  $s(I)$  est majorant de cet ensemble. On en déduit que

$$\sum_{j \in J} s(I_j) \leq s(I).$$

Afin de prouver l'inégalité opposée, considérons un nombre réel  $\varepsilon > 0$ . Il existe une partie finie  $F$  de  $I$  telle que l'on ait

$$s(I) \leq s(F) + \varepsilon.$$

Soit  $G$  le sous-ensemble de  $J$  formé des éléments  $j$  tels que  $F \cap I_j$  soit non vide. On a

$$s(I) - \varepsilon \leq s(F) = \sum_{j \in G} s(F \cap I_j) \leq \sum_{j \in G} s(I_j) \leq \sum_{j \in J} s(I_j) \quad \text{i.e.} \quad s(I) \leq \sum_{j \in J} s(I_j) + \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $s(I)$  est donc plus petit que la somme des  $s(I_j)$  pour  $j \in J$ . Cela termine la démonstration du théorème.

**Exemple 3.9.** Posons  $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $0 \leq a < 1$  et  $0 \leq b < 1$ . La famille  $(a^m b^n)_{(m,n) \in I}$  est sommable et l'on a

$$(31) \quad \sum_{(m,n) \in I} a^m b^n = \frac{1}{(1-a)(1-b)}.$$

Pour le vérifier, on utilise l'énoncé précédent avec la partition de  $I$  sous la forme

$$I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad \text{où} \quad I_j = \{j\} \times \mathbb{N}.$$

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la famille  $(a^j b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable de somme  $\frac{a^j}{1-b}$ , et la famille  $(\frac{a^j}{1-b})_{j \in \mathbb{N}}$  est aussi sommable, de somme  $\frac{1}{(1-a)(1-b)}$ . L'égalité (29) entraîne alors (31).