

Chapitre IV - Nombres complexes

Table des matières

1. Le corps des nombres complexes	1
2. Conjugaison et module	3
3. La fonction exponentielle complexe	6
4. Les fonctions réelles cosinus et sinus	12
5. Dérivées des fonctions cosinus et sinus	15
6. Le nombre π	18
7. La somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$	22
8. Forme trigonométrique	25
9. Argument	27
10. Équations algébriques	29
11. Interprétation géométrique	36

1. Le corps des nombres complexes

On construit ici le corps \mathbb{C} des nombres complexes à partir du corps \mathbb{R} des nombres réels, suivant la méthode découverte en 1835 par W. R. Hamilton. On pose par définition

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

et l'on munit cet ensemble d'une addition et d'une multiplication, par les formules ci-dessous. Pour tous (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose

$$(1) \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (\text{l'addition}),$$

$$(2) \quad (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (\text{la multiplication}).$$

Théorème 4.1. *Le triplet $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.*

Démonstration : Le couple $(\mathbb{C}, +)$ est par définition le groupe produit de deux copies de $(\mathbb{R}, +)$, c'est donc un groupe abélien. L'élément neutre est $(0, 0)$, et l'opposé de (a, b) est $(-a, -b)$.

Par ailleurs, on déduit directement des formules (1) et (2) que la multiplication est associative, distributive par rapport à l'addition, commutative, et que son élément neutre est $(1, 0)$. Le triplet $(\mathbb{C}, +, \times)$ est donc un anneau commutatif. Il reste à vérifier que tout élément non nul $(a, b) \in \mathbb{C}$ est inversible. Cela résulte de l'égalité

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0),$$

et l'inverse de (a, b) est donc $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$, d'où le résultat.

Tout élément de \mathbb{C} s'appelle un nombre complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe des nombres réels a et b tels que l'on ait

$$(3) \quad z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0).$$

En posant

$$i = (0, 1),$$

on obtient l'égalité $i^2 = (-1, 0)$. On dispose de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à un réel a associe le nombre complexe $(a, 0)$. C'est un morphisme de corps, donc est injectif (cela est visible ici directement), et son image est un sous-corps de \mathbb{C} isomorphe à \mathbb{R} . On identifiera dans toute la suite \mathbb{R} et son image dans \mathbb{C} par le morphisme ci-dessus. Avec cette identification, on a $i^2 = -1$, et compte tenu de (3), tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.

Le corps \mathbb{C} est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2 et $(1, i)$ en est une base. On en déduit par exemple :

Lemme 4.1. *Soit K un sous-corps de \mathbb{C} contenant \mathbb{R} . On a $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.*

Démonstration : Le \mathbb{R} -espace vectoriel K est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C} , donc sa dimension sur \mathbb{R} est 1 ou 2, ce qui entraîne l'assertion.

Comme on l'a déjà signalé, la structure du corps ordonné \mathbb{R} ne s'étend pas au corps \mathbb{C} . Plus précisément :

Proposition 4.1. *Le corps \mathbb{C} n'est pas un corps ordonné.*

Démonstration : Supposons que \mathbb{C} soit un corps ordonné par une relation d'ordre \leq . On a $1 > 0$ (lemme 1.4), d'où $-1 + 0 = -1 < 0$ puis $i^2 < 0$, et une contradiction (*loc. cit.*).

Remarque 4.1. Il existe des relations d'ordre totales sur \mathbb{C} . Tel est le cas de l'ordre lexicographique \mathcal{R} , pour lequel étant donnés (a, b) et (c, d) dans \mathbb{R}^2 , on a

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a < c \quad \text{ou bien} \quad (a = c \quad \text{et} \quad b \leq d),$$

où \leq est la relation d'ordre usuelle sur \mathbb{R} . Signalons par ailleurs, que la relation d'égalité est une relation d'ordre sur \mathbb{C} , compatible avec sa structure de corps, qui n'est pas totale.

2. Conjugaison et module

Définition 4.1. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) On dit x est la partie réelle de z et que y est sa partie imaginaire. On notera $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.
- 2) On dit que $x - iy$ est le nombre complexe conjugué de z . On le note \bar{z} .

Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , on a

$$(4) \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z), \quad z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R},$$

$$(5) \quad \bar{\bar{z}} + \overline{z'} = \overline{z + z'}, \quad \bar{\bar{z}} \overline{z'} = \overline{zz'}, \quad z = \bar{\bar{z}}.$$

D'après l'équivalence de (4) et les égalités (5), l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à z associe \bar{z} est un automorphisme involutif du corps \mathbb{C} , qui laisse fixe les nombres réels. On l'appelle la conjugaison complexe. Inversement :

Lemme 4.2. Soit f un automorphisme du corps \mathbb{C} laissant fixe les nombres réels. Alors f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Démonstration : On a $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$, donc $f(i)$ est racine du polynôme $X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$, d'où $f(i) = \pm i$. Puisque f fixe les nombres réels, si $f(i) = i$, alors f est l'identité de \mathbb{C} , sinon f est la conjugaison complexe.

Définition 4.2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $x, y \in \mathbb{R}$. Le module de z est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les égalités

$$(6) \quad |z| = |\bar{z}|, \quad |z| = |-z| \quad \text{et si } z \neq 0 \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

ainsi que les inégalités

$$(7) \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Si z est réel, $|z|$ est la valeur absolue usuelle de z . Comme on l'a déjà évoqué dans le chapitre I, en notant \mathbb{R}_+ l'ensemble des nombres réels positifs :

Proposition 4.2. *L'application de \mathbb{C} dans \mathbb{R}_+ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $|z|$ est une valeur absolue sur \mathbb{C} . Autrement dit, quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a*

1) $|z| = 0$ si seulement si $z = 0$.

2) $|zz'| = |z||z'|$.

3) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

De plus, on a $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $zz' = 0$ ou s'il existe $t > 0$ tel que $z = tz'$.

Démonstration : L'assertion 1 est immédiate. Soient z et z' des nombres complexes. On a $|zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = |z|^2|z'|^2$, d'où $|zz'| = |z||z'|$. Par ailleurs, on a

$$(8) \quad |z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z}.$$

Posons $Z = z\overline{z'}$. On a $Z + \overline{Z} = 2\operatorname{Re}(Z)$, et d'après la première inégalité de (7), on obtient

$$Z + \overline{Z} \leq 2|Z|.$$

Puisque l'on a $|Z| = |z||\overline{z'}| = |z||z'|$, il en résulte que

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2,$$

d'où l'inégalité triangulaire.

Si $zz' = 0$, on a $|z + z'| = |z| + |z'|$. Si $z = tz'$ où $t > 0$, on a les égalités

$$|z + z'| = |z'(t + 1)| = |z'|(t + 1) = t|z'| + |z'| = |z| + |z'|.$$

Inversement, si $|z + z'| = |z| + |z'|$, d'après (8) on a $Z + \overline{Z} = 2|z||z'| = 2|Z|$, d'où $|Z| = \operatorname{Re}(Z)$ et Z est dans \mathbb{R}_+ . Si zz' est non nul, on a alors

$$z = tz' \quad \text{avec} \quad t = \frac{Z}{|z'|^2} > 0.$$

Lemme 4.3. *Quels que soient z et z' dans \mathbb{C} , on a*

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

Démonstration : Cela résulte de l'égalité $z = (z - z') + z'$ et de l'inégalité triangulaire.

Notons U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Posons $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Lemme 4.4. *L'ensemble U est un sous-groupe du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* .*

Démonstration : L'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui à z associe $|z|$ est un morphisme de groupes (assertion 2 de la prop. 4.2) de noyau U , d'où l'assertion.

Lemme 4.5. *Tout nombre complexe non nul z s'écrit de façon unique sous la forme $z = \lambda u$, où λ est un nombre réel strictement positif et u est dans U .*

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. On a

$$z = |z| \frac{z}{|z|},$$

et le module de $\frac{z}{|z|}$ est 1, d'où l'assertion d'existence. Par ailleurs, si l'on a $\lambda u = \mu v$ où $\lambda, \mu > 0$ et $u, v \in U$, en égalant le module des deux membres de cette égalité, on obtient $\lambda = \mu$, puis $u = v$.

Signalons le résultat suivant qui a de très nombreuses applications.

Proposition 4.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient n un entier ≥ 1 et $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$, $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ des familles de nombres complexes. On a*

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^2 \right).$$

C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.6. *Soient a et b des nombres réels. Pour tout $t > 0$, on a*

$$2ab \leq t^2 a^2 + t^{-2} b^2.$$

On a l'égalité si et seulement si $b = at^2$.

En effet, il suffit de remarquer que l'on a $(ta - t^{-1}b)^2 \geq 0$.

Démonstration de la proposition : On a l'inégalité

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |b_j|,$$

de sorte que l'on peut supposer que les nombres a_j et b_j sont des réels positifs. D'après le lemme, quels que soient $t > 0$ et $j = 1, \dots, n$, on a alors

$$2a_j b_j \leq t^2 a_j^2 + t^{-2} b_j^2,$$

d'où il résulte que

$$2 \sum_{j=1}^n a_j b_j \leq t^2 A + t^{-2} B \quad \text{avec} \quad A = \sum_{j=1}^n a_j^2 \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

On peut supposer que l'on a $A > 0$ et $B > 0$, sinon tous les a_j ou bien tous les b_j sont nuls, et dans ce cas le résultat est immédiat. Compte tenu du lemme, $2\sqrt{AB}$ est le plus grand des minorants de l'ensemble

$$\left\{ t^2 A + t^{-2} B \mid t > 0 \right\}.$$

En effet, $2\sqrt{AB}$ est un minorant de cet ensemble et l'on a $2\sqrt{AB} = t^2 A + t^{-2} B$ pour $t = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}$. On en déduit que l'on a

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sqrt{AB},$$

d'où le résultat.

3. La fonction exponentielle complexe

Il y a deux façons classiques a priori de définir la fonction exponentielle complexe. Celle dont on a déjà fait allusion avec la formule (10) du chapitre III, qui est sans doute la plus courante, ou bien celle qui va suivre, qui a l'avantage de permettre de démontrer la formule d'addition, $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ valable pour tous nombres complexes z et z' , sans avoir recourt à la théorie des séries numériques proprement dite. La définition que l'on va adopter ici repose sur l'énoncé suivant :

Théorème 4.2. *Soit z un nombre complexe. La suite de terme général*

$$u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$$

est convergente.

Définition 4.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la limite de la suite $(u_n(z))$ est appelée exponentielle de z .*

Démonstration du théorème 4.2 : On commence par démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$ la suite $(u_n(x))$ est convergente. On en déduit ensuite que la suite $(u_n(z))$ est de Cauchy, ce qui, compte tenu du critère de Cauchy, établira le résultat.

Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, posons

$$a_k(n) = \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \quad \text{si } 0 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad a_k(n) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

Notons que $a_0(n) = a_1(n) = 1$, car par convention un produit vide vaut 1.

Lemme 4.7. Soit x un nombre réel positif. La suite $(u_n(x))$ est convergente.

Démonstration : D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geq 1$, on a

$$(9) \quad u_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(n) \frac{x^k}{k!}.$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $0 < a_k(n) \leq 1$. Par suite, x étant positif, on a

$$(10) \quad u_n(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Par ailleurs, on a vu que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente. D'après (10), la suite $(u_n(x))$ est donc majorée par la somme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. Vérifions alors que $(u_n(x))$ est croissante, ce qui prouvera le résultat. Pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$, on a $1 - \frac{j}{n+1} \geq 1 - \frac{j}{n}$, d'où l'on déduit que

$$(11) \quad a_k(n+1) \geq a_k(n) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Puisque x et $a_{n+1}(n+1)$ sont positifs, il en résulte que

$$u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k(n+1) \frac{x^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^n a_k(n+1) \frac{x^k}{k!} \geq u_n(x),$$

d'où l'assertion.

Démontrons que la suite $(u_n(z))$ est de Cauchy. Considérons pour cela des entiers p et q tels que $q > p \geq 1$. On a l'égalité (cf. (9))

$$|u_q(z) - u_p(z)| = \left| \sum_{k=0}^q a_k(q) \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^p a_k(p) \frac{z^k}{k!} \right|.$$

Par définition, on a $a_k(p) = 0$ si $k = p+1, \dots, q$, d'où

$$\sum_{k=0}^p a_k(p) \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^q a_k(p) \frac{z^k}{k!}.$$

On obtient ainsi

$$|u_q(z) - u_p(z)| = \left| \sum_{k=0}^q (a_k(q) - a_k(p)) \frac{z^k}{k!} \right|,$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$(12) \quad |u_q(z) - u_p(z)| \leq \sum_{k=0}^q |a_k(q) - a_k(p)| \frac{|z|^k}{k!}.$$

Par ailleurs, on a

$$a_k(q) \geq a_k(p) \quad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, q\}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} a_k(q) &\geq 0 \quad \text{et} \quad a_k(p) = 0 \quad \text{si } p < k \leq q, \\ 1 - \frac{j}{q} &\geq 1 - \frac{j}{p} \quad \text{si } j = 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

d'où

$$a_k(q) = \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{q}\right) \geq \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{p}\right) = a_k(p) \quad \text{si } 0 \leq k \leq p.$$

On a donc

$$(13) \quad \sum_{k=0}^q |a_k(q) - a_k(p)| \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^q (a_k(q) - a_k(p)) \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^q a_k(q) \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^q a_k(p) \frac{|z|^k}{k!}.$$

En utilisant de nouveau le fait que $a_k(p) = 0$ si $k > p$, on obtient

$$\sum_{k=0}^q a_k(p) \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^p a_k(p) \frac{|z|^k}{k!}.$$

D'après (12) et (13), il en résulte que l'on a

$$(14) \quad |u_q(z) - u_p(z)| \leq u_q(|z|) - u_p(|z|) \leq |u_q(|z|) - u_p(|z|)|.$$

D'après le lemme 4.7, la suite $(u_n(|z|))$ est convergente. Elle est donc de Cauchy. L'inégalité (14) entraîne qu'il en est de même de la suite $(u_n(z))$. D'après le critère de Cauchy, elle est donc convergente. Cela termine la démonstration du théorème.

Par restriction à \mathbb{R} , on obtient ainsi la fonction exponentielle réelle. La définition 4.3 est compatible avec la formule (10) du chapitre III : on a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente, et l'on peut démontrer que sa somme est la limite de la suite $(u_n(z))$. On se limitera ici à prouver l'énoncé particulier suivant :

Proposition 4.4. *Soit x un nombre réel positif. On a l'égalité*

$$\lim u_n(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration : Par passage à la limite, il résulte de (10) que l'on a

$$(15) \quad \lim u_n(x) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Fixons alors un entier $m \geq 1$, et considérons un entier $n \geq m$. Tous les termes du second membre de (9) étant positifs, on a

$$(16) \quad u_n(x) \geq \sum_{k=0}^m a_k(n) \frac{x^k}{k!}.$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre de (16), qui comporte $m+1$ termes où m est fixe ne dépend pas de n , tend vers

$$\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\lim u_n(x) \geq \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}.$$

La limite de $(u_n(x))$ est donc un majorant de chacune des sommes partielles de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. Puisque sa somme est le plus petit des majorants de l'ensemble de ses sommes partielles, on a donc

$$(17) \quad \lim u_n(x) \geq \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

d'où le résultat ((15) et (17)).

D'après ce qui précède, on dispose désormais de la fonction exponentielle complexe, que l'on notera provisoirement, et occasionnellement par la suite,

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = \lim u_n(z).$$

Propriétés de la fonction exponentielle

Tout d'abord, on a

$$(18) \quad \exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(1) = e.$$

En effet, on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$, et la seconde égalité résulte de la proposition 4.4 et de la formule (6) du chapitre III.

Théorème 4.3 (Formule d'addition). *Soient z et z' des nombres complexes. On a*

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z').$$

Démonstration : Pour tout $n \geq 1$, on a

$$(19) \quad u_n(z)u_n(z') = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{z'}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{z+z'}{n}\right)^n \left(1 + \frac{zz'}{n^2 + n(z+z')}\right)^n.$$

Le théorème est une conséquence de l'énoncé suivant :

Lemme 4.8. *Soient a et b des nombres complexes. La suite de terme général*

$$\left(1 + \frac{a}{n^2 + nb}\right)^n$$

est convergente de limite 1.

Démonstration : Soit n un entier ≥ 1 . D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(1 + \frac{a}{n^2 + nb}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{a^k}{(n^2 + nb)^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)a^k}{k!n^k(n+b)^k}.$$

Pour tout k compris entre 1 et n , on a

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k!} \leq 1.$$

On en déduit l'inégalité

$$\left|\left(1 + \frac{a}{n^2 + nb}\right)^n - 1\right| \leq \sum_{k=1}^n \left|\frac{a}{n+b}\right|^k.$$

Par ailleurs, on a $n - |b| \leq |n+b|$. Il en résulte que si l'on a $n > |b|$, alors

$$\left|\left(1 + \frac{a}{n^2 + nb}\right)^n - 1\right| \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{|a|}{n - |b|}\right)^k$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x < 1$, on a

$$x + \cdots x^n = x \frac{1 - x^n}{1 - x} \leq \frac{x}{1 - x}.$$

Dès que $n > |a| + |b|$, on a donc l'inégalité

$$(20) \quad \left|\left(1 + \frac{a}{n^2 + nb}\right)^n - 1\right| \leq \frac{|a|}{n - |b|} \left(\frac{1}{1 - \frac{|a|}{n - |b|}}\right),$$

ce qui entraîne le résultat, car la suite de terme général le second membre de (20) converge vers 0.

On en déduit le théorème 4.3 par passage à la limite quand n tend vers l'infini dans l'égalité (19).

Corollaire 4.1. *Soit z un nombre complexe. On a*

$$\exp(z) \neq 0, \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \text{et} \quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Démonstration : D'après le théorème 4.3, utilisé avec $z' = -z$, et (18), on a

$$1 = \exp(z) \exp(-z),$$

d'où les deux premières assertions. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$ on a

$$u_n(\bar{z}) = \overline{u_n(z)} \quad \text{et} \quad |\overline{u_n(z)} - \overline{\exp(z)}| = |u_n(z) - \exp(z)|,$$

ce qui entraîne la propriété de conjugaison.

Corollaire 4.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$.*

Démonstration : On a $\exp(x) \neq 0$ et

$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 \geq 0.$$

Notation. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on notera le plus souvent e^z l'exponentielle de z , plutôt que $\exp(z)$. Cette notation, qui est la plus courante, est justifiée par la formule d'addition et les égalités (18). Elle est compatible avec la définition de la fonction puissance à exposants rationnels donnée dans le chapitre I. En effet, si $z = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, on a

$$(e^z)^q = \left(\exp\left(\frac{p}{q}\right) \right)^q = \exp(p) = (\exp(1))^p = e^p,$$

de sorte que e^z est dans ce cas la racine q -ième positive de e^p (cor. 4.2).

Corollaire 4.3. 1) *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{it}| = 1$.*

2) *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où x et y sont dans \mathbb{R} . On a*

$$|e^z| = e^x.$$

Démonstration : Soit t un nombre réel. On a $\overline{e^{it}} = e^{-it}$. On a ainsi

$$|e^{it}|^2 = \overline{e^{it}} e^{it} = e^{-it} e^{it} = e^0 = 1,$$

d'où $|e^{it}| = 1$. D'après l'égalité $e^z = e^x e^{iy}$, on obtient $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$ (cor. 4.2).

4. Les fonctions réelles cosinus et sinus

Définition 4.4. 1) La fonction cosinus est la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} qui à x associe la partie réelle de e^{ix} . On la note \cos . On a ainsi

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2) La fonction sinus est la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} qui à x associe la partie imaginaire de e^{ix} . On la note \sin . On a ainsi

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par définition, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(21) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

et les relations, appelées souvent formules d'Euler,

$$(22) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Les fonctions cosinus et sinus sont parfois appelées les fonctions circulaires réelles.

Premières propriétés des fonctions cosinus et sinus

Lemme 4.9. 1) On a $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3) Les fonctions cosinus et sinus sont à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \cos(-x)$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

5) Pour tous x et y dans \mathbb{R} , on a

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{et} \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Démonstration : La première assertion résulte de (21) vu que $e^0 = 1$. La seconde se déduit de (21) et du corollaire 4.3, et elle entraîne directement la troisième. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$, d'où $\cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$ et la quatrième assertion. Quant à la dernière, elle résulte de l'égalité

$$e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)},$$

en égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres.

Proposition 4.5 (Formule de De Moivre). *Quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$(23) \quad (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Démonstration : D'après le théorème 4.3 on a $e^{inx} = (e^{ix})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors n un entier relatif négatif. En posant $m = -n$, on a donc $e^{imx} = (e^{ix})^m$, d'où en utilisant le corollaire 4.1,

$$e^{inx} = e^{-imx} = \frac{1}{e^{imx}} = \frac{1}{(e^{ix})^m} = (e^{ix})^{-m} = (e^{ix})^n,$$

et la formule (23).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, cette formule permet de calculer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Corollaire 4.4. *Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Soient r et s les parties entières respectivement de $\frac{n}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$. On a*

$$\begin{aligned} \cos nx &= \sum_{j=0}^r C_n^{2j} (-1)^j (\cos x)^{n-2j} (\sin x)^{2j}, \\ \sin nx &= \sum_{j=0}^s C_n^{2j+1} (-1)^j (\cos x)^{n-2j-1} (\sin x)^{2j+1}. \end{aligned}$$

Démonstration : On a

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^{n-k} i^k (\sin x)^k.$$

On obtient alors le résultat en séparant les parties réelles et imaginaires du second membre de cette égalité, en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

Ces formules et l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ permettent d'exprimer $\cos nx$ comme un polynôme de degré n en $\cos x$, et $\sin nx$ comme le produit de $\sin x$ par un polynôme de degré $n-1$ en $\cos x$. On peut expliciter ces polynômes par une relation de récurrence. Par exemple, on a

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1, \quad \cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

Déterminons ici les polynômes de degré n en $\cos x$ ainsi obtenus, appelés polynômes de Tchebycheff.

Proposition 4.6 (Polynômes de Tchebycheff). Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ définie par les égalités

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

- 1) Le degré de T_n est n , et si n est non nul son coefficient dominant est 2^{n-1} .
- 2) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(24) \quad \cos nx = T_n(\cos x).$$

Démonstration : Le degré de T_0 est 0 et celui de T_1 est 1. Soit n un entier ≥ 2 tel que le degré de T_{n-1} soit $n-1$ et celui de T_{n-2} soit $n-2$. D'après la formule de récurrence T_n est alors de degré n . De plus, le coefficient dominant de T_1 est 1, de sorte que si pour un entier $n \geq 2$ le coefficient dominant de T_{n-1} est 2^{n-2} , celui de T_n est 2^{n-1} (le degré de T_{n-2} est strictement plus petit que celui de T_{n-1}), d'où la première assertion.

Par ailleurs, la formule (24) est vraie si $n = 0$ et $n = 1$. Soit n un entier ≥ 2 tel que (24) soit vraie pour les entiers $n-1$ et $n-2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors l'égalité

$$T_n(\cos x) = 2 \cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x.$$

D'après la première formule d'Euler (22), on a

$$e^{inx} = 2 \cos x e^{i(n-1)x} - e^{i(n-2)x}.$$

En égalant les parties réelles des deux membres de cette égalité, on en déduit que l'on a $\cos nx = T_n(\cos x)$.

À titre indicatif, on a

$$T_2 = 2X^2 - 1, \quad T_3 = 4X^3 - 3X, \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1, \quad T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

Linéarisation. Explicitons les expressions classiques de linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$. On utilise les formules d'Euler : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a donc

$$2^n \cos^n x = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} e^{-i(n-k)x} \quad \text{et} \quad (2i)^n \sin^n x = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x}.$$

On explicite les sommes ci-dessus en regroupant les termes d'indices k et $n - k$. Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on a

$$C_n^k e^{ikx} e^{-i(n-k)x} + C_n^{n-k} e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = 2C_n^k \cos(n - 2k)x.$$

On distingue alors deux cas suivant la parité de n .

1) Supposons n pair. Posons $n = 2m$. On obtient

$$2^{2m-1} (\cos x)^{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m - k)x + \frac{C_{2m}^m}{2}.$$

$$2^{2m-1} (\sin x)^{2m} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k \cos 2(m - k)x + \frac{C_{2m}^m}{2}.$$

2) Supposons n impair. Posons $n = 2m + 1$. Dans ce cas, on a

$$2^{2m} (\cos x)^{2m+1} = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos(2(m - k) + 1)x.$$

$$2^{2m} (\sin x)^{2m+1} = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m+1}^k \sin(2(m - k) + 1)x.$$

5. Dérivées des fonctions cosinus et sinus

On démontre ici l'énoncé suivant :

Proposition 4.7. *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$(25) \quad \cos' x = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin' x = \cos x.$$

En particulier, elles sont continues sur \mathbb{R} .

Démonstration : Commençons par établir les égalités

$$(26) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vu que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, cela prouvera que les fonctions \cos et \sin sont dérivables en 0, et les formules (25) pour $x = 0$. Démontrons pour cela l'énoncé suivant :

Lemme 4.10. *On a l'égalité*

$$(27) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{ix} - 1}{x} = i.$$

Démonstration : Soit ε un nombre réel strictement positif. Il s'agit de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait l'implication

$$(28) \quad x \neq 0 \text{ et } |x| < \alpha \implies \left| \frac{e^{ix} - 1}{x} - i \right| < \varepsilon.$$

Considérons un nombre réel $x \neq 0$ et un entier naturel $n \neq 0$. On a

$$\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(ix)^k}{n^k} = 1 + ix + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{(ix)^k}{n^k}.$$

On en déduit que l'on a

$$\left| \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - 1 \right) - i \right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{C_n^k}{n^k} |x|^{k-1}.$$

Par ailleurs, on a

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

d'où l'inégalité

$$\frac{C_n^k}{n^k} \leq 1.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{k=2}^n \frac{C_n^k}{n^k} |x|^{k-1} \leq \sum_{k=2}^n |x|^{k-1}.$$

Dès que $|x| < 1$, on a donc

$$\left| \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - 1 \right) - i \right| \leq \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

En posant

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon},$$

on constate alors que l'on a

$$(29) \quad x \neq 0 \text{ et } |x| < \alpha \implies \left| \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - 1 \right) - i \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons

$$v_n(x) = \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n - 1 \right).$$

Par définition, on a

$$\lim v_n(x) = \frac{e^{ix} - 1}{x}.$$

Par suite, dès que n est assez grand, on a

$$\left| v_n(x) - \frac{e^{ix} - 1}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Compte tenu de (29), en choisissant n assez grand, si l'on a $x \neq 0$ et $|x| < \alpha$, on obtient les inégalités

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{x} - i \right| \leq \left| \frac{e^{ix} - 1}{x} - v_n(x) \right| + |v_n(x) - i| < \varepsilon.$$

Cela prouve la condition (28) avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, d'où le lemme.

Les formules (26) se déduisent alors de (27) en séparant les parties réelles et imaginaires dans les deux membres de cette égalité.

La proposition se déduit comme suit. Soit x un nombre réel. Pour tout $h \neq 0$ posons

$$\Delta(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

D'après le lemme 4.9, on a

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h,$$

d'où il résulte que

$$\Delta(h) = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

On déduit alors des formules (26) que l'on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \Delta(h) = -\sin x,$$

donc la fonction cosinus est dérivable en x et l'on a $\cos' x = -\sin x$. De même, on a

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h,$$

d'où l'égalité

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right).$$

La limite quand h tend vers 0 du premier membre de cette égalité est donc $\cos x$, d'où (25), et le résultat car toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

6. Le nombre π

L'énoncé fondamental suivant permet de donner une définition du nombre π .

Théorème 4.4. *Il existe un plus petit nombre réel $a > 0$ tel que $\cos a = 0$.*

Définition 4.5. *Le nombre π est défini par l'égalité*

$$\pi = 2a.$$

Démonstration du théorème : On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Démonstration : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $x - \sin x$. Elle est dérivable sur \mathbb{R} (prop. 4.7). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Par suite, f est croissante sur \mathbb{R} (th. 1.4). Puisque $f(0) = 0$, on a donc

$$(30) \quad \sin x \leq x \quad \text{pour } x \geq 0 \quad \text{et} \quad x \leq \sin x \quad \text{pour } x \leq 0.$$

Soit alors $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$. Elle est dérivable et pour tout x , on a $g'(x) = x - \sin x$. Compte tenu de (30), g est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 0]$. Puisque $g(0) = 0$, on obtient

$$(31) \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit ensuite $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h'(x) = g(x)$. On déduit de (31) que h est croissante sur \mathbb{R} . Le fait que $h(0) = 0$ entraîne les inégalités

$$(32) \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \quad \text{pour } x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} \quad \text{pour } x \leq 0.$$

Soit enfin la fonction $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \cos x$. On a $k'(x) = h(x)$, donc k est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 0]$. L'égalité $k(0) = 0$ entraîne alors le résultat.

Le théorème se déduit comme suit. On vérifie que $\cos 2 < 0$ (lemme 4.11). Par ailleurs, on a $\cos 0 = 1$ et la fonction cosinus est continue sur \mathbb{R} . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\alpha \in]0, 2[$ tel que $\cos \alpha = 0$. Posons

$$F = \left\{ x \in]0, 2[\mid \cos x = 0 \right\}.$$

L'ensemble F n'est pas vide car α est dans F , et il est minoré par 0. Par suite, F possède une borne inférieure a . Vérifions que a appartient à F , ce qui prouvera que F a un plus petit élément et le résultat. Soit n un entier naturel non nul. Le nombre $a + \frac{1}{n}$ ne minore pas F , donc il existe $x_n \in F$ tel que l'on ait $a \leq x_n < a + \frac{1}{n}$. La suite (x_n) d'éléments de F ainsi construite est convergente de limite a . La fonction cosinus étant continue, la suite $(\cos x_n)$ converge vers $\cos a$ (cor. 2.3). Puisque $\cos x_n = 0$, on a donc $\cos a = 0$, ce qui entraîne que a est dans F (on a $0 < a \leq \alpha < 2$).

Remarque 4.2. D'après le lemme 4.11, on a $\cos(1,6) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne ainsi l'existence d'un réel x tel que $0 < x < 1,6$ et que $\cos x = 0$. Par ailleurs, d'après l'inégalité (31), pour tout $x \in]0, \sqrt{2}[$ on a $\cos x > 0$, d'où $\pi \geq 2\sqrt{2}$. On obtient ainsi l'encadrement (c'est un début) $2,8 < \pi < 3,2$.

Proposition 4.8. 1) On a $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$ i.e. on a $e^{i\pi} = -1$.

2) On a $e^{2i\pi} = 1$ et les fonctions cosinus et sinus admettent 2π pour période.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

4) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos x > 0$.

5) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x > 0$.

6) On a $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Démonstration : 1) On a l'égalité

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin^2 \frac{\pi}{2}.$$

Vu que $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$, on a $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$, d'où $\cos \pi = -1$, puis $\sin \pi = 0$.

2) On a $e^{i\pi} = -1$, d'où $e^{2i\pi} = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$ d'où les égalités $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

3) L'égalité $e^{i(\pi+x)} = -e^{ix}$ entraîne l'assertion 3.

4) La fonction cosinus est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et l'on a $\cos 0 = 1$. Par définition, $\frac{\pi}{2}$ est le plus petit nombre réel strictement positif où elle s'annule. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc strictement positive dans $[0, \frac{\pi}{2}[$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin' x = \cos x$. Puisque l'on a $\cos x > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction sinus est donc strictement croissante dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ (th. 1.4), d'où l'assertion vu que $\sin 0 = 0$.

6) On a $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$ et $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, d'où $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, puis $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Corollaire 4.5. *Soit x un nombre réel. On a les équivalences*

$$(33) \quad \cos x = 0 \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},$$

$$(34) \quad \sin x = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration : Les fonctions cosinus et sinus admettant 2π pour période, il suffit d'examiner les zéros de ces fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

La fonction cosinus ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Soit alors x un élément de $]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Posons $t = \pi - x$. On a $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et $\cos x = -\cos t$ (prop. 4.8), d'où $\cos x \neq 0$. Cela prouve que $\frac{\pi}{2}$ est le seul zéro de la fonction cosinus sur $[0, \pi[$. Parce que $\cos x = \cos(-x)$ et que $\cos(-\pi) \neq 0$, les zéros de la fonction cosinus sur $[-\pi, \pi[$ sont donc $\pm \frac{\pi}{2}$. L'ensemble des zéros de cette fonction sur \mathbb{R} est donc formé des éléments $\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne (33).

La fonction sinus ne s'annule pas dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ (*loc. cit.*). Soit x un élément de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$. En posant $t = \pi - x$, on a $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \sin t$, d'où $\sin x \neq 0$. La fonction sinus n'a donc pas de zéros dans $]0, \pi[$. Compte tenu des égalités $\sin(-x) = -\sin x$ et $\sin(-\pi) = 0$, les seuls zéros de la fonction sinus sur $[-\pi, \pi[$ sont $-\pi$ et 0 , d'où l'équivalence (34).

Corollaire 4.6. *Soit x un nombre réel. On a l'équivalence*

$$e^{ix} = 1 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration : Si x dans $2\pi\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$, d'où les égalités $e^{ix} = e^{2ik\pi} = (e^{2i\pi})^k = 1$. Inversement, supposons $e^{ix} = 1$. On a alors $\sin x = 0$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\pi$. Puisque $\cos x = 1$, l'entier k doit être pair, d'où le résultat.

Remarque 4.3 (Interprétation géométrique du nombre π). Voyons en quoi la définition donnée de π est conforme à celle connue depuis l'enfance, à savoir que 2π est le «périmètre» du cercle de rayon 1. Bien entendu, il s'agit de préciser ce que l'on entend par périmètre d'un cercle, ce qui ne peut se faire sans la théorie de l'intégration. Limitons nous ici à se convaincre de l'analogie entre ces deux points de vues. Considérons pour cela un entier $n \geq 3$ et les nombres complexes

$$z_k = \exp\left(\frac{i2k\pi}{n}\right) \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Les z_k sont de module 1 (cor. 4.3). Ils appartiennent donc au cercle de centre 0 et de rayon 1, d'équation $|z| = 1$ dans le plan complexe. On a $z_0 = z_n$ et l'égalité

$$z_{k+1} - z_k = 2iz_k \sin \frac{\pi}{n} \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right).$$

D'après la proposition 4.8, on a $\sin \frac{\pi}{n} > 0$, d'où l'on déduit que

$$|z_{k+1} - z_k| = 2 \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{pour } k = 0, \dots, n-1.$$

La longueur de la ligne polygonale de sommets les points z_k est donc

$$L_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}.$$

En partant du principe que l'on obtient le « périmètre » P du cercle unité en faisant tendre n vers l'infini, on obtient (cf. la seconde égalité de (26) et le lemme 2.3)

$$P = \lim L_n = 2\pi$$

comme attendu.

Le corollaire 4.5 permet de définir les fonctions réelles tangente et cotangente.

Définition 4.6. 1) La fonction tangente, que l'on notera tg , est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ à valeurs dans \mathbb{R} , par l'égalité

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

2) La fonction cotangente, que l'on notera cotg , est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ à valeurs dans \mathbb{R} , par l'égalité

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Lemme 4.12. Les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π . Elles sont dérivables sur leurs domaines de définition. Pour tout x dans ces ensembles, on a

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 4.7.

On utilisera l'énoncé suivant :

Lemme 4.13. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a les inégalités

$$0 \leq \operatorname{cotg} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Démonstration : De la proposition 4.8 on déduit que $\cotg x \geq 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
 Considérons la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par l'égalité

$$f(x) = x \cos x - \sin x.$$

Elle est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout x dans cet intervalle, on a $f'(x) = -x \sin x$. Par suite, on a $f'(x) < 0$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et f est donc strictement décroissante dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $f(0) = 0$, d'où $f(x) < 0$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui entraîne la seconde inégalité. En ce qui concerne la dernière inégalité, on remarque que la fonction $g :]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - \sin x$ est dérivable et que $g'(x) = 1 - \cos x > 0$, donc g est strictement croissante dans cet intervalle, d'où le résultat car $g(0) = 0$.

7. La somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

En utilisant ce qui précède, notamment les formules d'Euler, on va calculer la somme cette série de Riemann, et en déduire l'approximation décimale de π à 10^{-3} près par défaut.

Théorème 4.5. *La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et on a l'égalité*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration : On a déjà vu que cette série est convergente.

1) Soit n un entier ≥ 1 . Posons

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

Notons que ces sommes sont bien définies car si k est compris entre 1 et n , alors $\frac{k\pi}{2n+1}$ n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$. Vérifions que l'on a

$$(35) \quad \alpha_n = \frac{n(2n-1)}{3} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Posons

$$z_k = \exp\left(\frac{i2k\pi}{2n+1}\right).$$

On a $z_k \neq 1$ (cor. 4.6). Par ailleurs, d'après les formules d'Euler, on a

$$\frac{z_k + 1}{z_k - 1} = \frac{\exp\left(\frac{ik\pi}{2n+1}\right) + \exp\left(\frac{-ik\pi}{2n+1}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{2n+1}\right) - \exp\left(\frac{-ik\pi}{2n+1}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)},$$

d'où l'égalité

$$\left(\frac{z_k + 1}{z_k - 1}\right)^2 = -\cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Posons

$$u_k = \frac{z_k + 1}{z_k - 1},$$

de sorte que l'on a

$$(36) \quad \alpha_n = -\sum_{k=1}^n u_k^2.$$

Compte tenu des égalités $z_k^{2n+1} = 1$ et $z_k(u_k - 1) = 1 + u_k$, on obtient

$$(u_k + 1)^{2n+1} - (u_k - 1)^{2n+1} = 0,$$

autrement dit,

$$\sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j} u_k^{2j} = 0.$$

Par suite, les nombres complexes u_k^2 ($1 \leq k \leq n$) sont racines du polynôme

$$F = \sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j} X^j \in \mathbb{Z}[X].$$

Vérifions que si k et k' sont deux entiers distincts compris entre 1 et n , on a $u_k^2 \neq u_{k'}^2$. Si $u_k = u_{k'}$, on a $z_k = z_{k'}$. D'après le corollaire 4.6, l'entier $k - k'$ appartient alors à $(2n+1)\mathbb{Z}$, d'où $k = k'$, ce qui n'est pas. Si $u_k = -u_{k'}$, on a dans ce cas $z_k z_{k'} = 1$, d'où $k + k' \in (2n+1)\mathbb{Z}$, ce qui conduit de nouveau à une contradiction, d'où l'assertion. Les racines de F dans \mathbb{C} sont donc les n nombres complexes u_k^2 . Vu que F est degré n et que $C_{2n+1}^{2n} = 2n+1$, on en déduit que l'on a dans $\mathbb{C}[X]$ l'égalité

$$\sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j} X^j = (2n+1) \prod_{k=1}^n (X - u_k^2).$$

En égalant les coefficients de degré $n-1$, on obtient

$$-\sum_{k=1}^n u_k^2 = \frac{C_{2n+1}^{2n-2}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

ce qui, compte tenu de (36), prouve la première égalité de (35). Par ailleurs, pour tout x dans $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotg^2 x,$$

d'où $\beta_n = n + \alpha_n$, et la seconde égalité de (35).

2) Pour tout k compris entre 1 et n , on a

$$0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

D'après le lemme 4.13, on a donc

$$0 \leq \cotg \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{2n+1}{k\pi} < \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

On en déduit que

$$\cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \left(\frac{2n+1}{k\pi} \right)^2 < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

D'après les égalités (35), en sommant pour k entre 1 et n , on obtient

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

Cela entraîne le résultat par passage à la limite dans ces inégalités.

Corollaire 4.7. *L'approximation décimale de π à 10^{-3} par défaut est 3,141.*

Démonstration : Considérons un entier $N \geq 1$ fixé. Posons

$$S_N = 1 + \cdots + \frac{1}{N^2},$$

et vérifions que l'on a

$$(37) \quad 0 < \frac{\pi^2}{6} - S_N \leq \frac{1}{N}.$$

Pour tout $m \geq N+1$, posons

$$R_N(m) = \sum_{k=N+1}^m \frac{1}{k^2}.$$

On a

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = S_N + R_N(m),$$

donc la suite $(R_N(m))$ est convergente et l'on a quand m tend vers l'infini

$$(38) \quad \lim R_N(m) = \frac{\pi^2}{6} - S_N.$$

Pour tout $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

d'où il résulte que

$$R_N(m) \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{m},$$

et par passage à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient

$$\lim R_N(m) \leq \frac{1}{N}.$$

Par ailleurs, on a

$$R_N(m) \geq \frac{1}{(N+1)^2},$$

donc la limite de $R_N(m)$ est strictement positive. L'égalité (38) entraîne alors (37). On en déduit que

$$\sqrt{6S_N} < \pi \leq \sqrt{6\left(S_N + \frac{1}{N}\right)}.$$

Avec $N = 9550$ (le plus petit N possible), on vérifie que l'on a

$$\sqrt{6\left(S_N + \frac{1}{N}\right)} - \sqrt{6S_N} < 10^{-4} \quad \text{d'où} \quad \sqrt{6S_N} < \pi < \sqrt{6S_N} + 10^{-4},$$

puis

$$3,1414 < \pi < 3,1416,$$

d'où le résultat.

On constate que la série considérée converge lentement vers sa limite. Le procédé ci-dessus n'est donc pas un moyen efficace pour déterminer π avec une grande précision. Il existe d'autres développements en série de π beaucoup plus performants de ce point de vue.

8. Forme trigonométrique

Soit U le sous-ensemble de \mathbb{C}^* formé des nombres complexes de module 1.

Théorème 4.6. *L'application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow U$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par l'égalité*

$$\psi(t) = e^{it}$$

est une surjection de \mathbb{R} sur U . Plus précisément, pour tout $z \in U$ il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que $\psi(t) = z$.

Démonstration : Tout d'abord pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{it} est dans U . Soit z un élément de U . Il existe x et y dans \mathbb{R} tels que $z = x + iy$ et $x^2 + y^2 = 1$. On a $|x| \leq 1$. Par ailleurs, on

a $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$, et la fonction cosinus est continue sur l'intervalle $[0, \pi]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos t = x$. L'égalité $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ entraîne alors $\sin t = \pm y$. Si l'on a $y = \sin t$ on obtient $z = \psi(t)$, et si $y = -\sin t$ on a $z = \psi(-t)$. Cela prouve que ψ est surjective sur U . De plus, si t et t' sont deux nombres réels tels que $\psi(t) = \psi(t') = z$, on a $\psi(t - t') = 1$, et d'après le corollaire 4.6, le nombre réel $t - t'$ appartient à $2\pi\mathbb{Z}$, d'où le résultat.

On en déduit l'écriture de tout nombre complexe non nul sous forme trigonométrique :

Corollaire 4.8 (Forme trigonométrique). *Soit z un nombre complexe non nul. Il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, et un unique nombre réel $r > 0$, tels que l'on ait $z = re^{it}$.*

Démonstration : Posons $r = |z|$. Le nombre complexe $\frac{z}{r}$ étant de module 1, le théorème 4.6 entraîne l'assertion d'existence. Supposons que l'on ait $re^{it} = r'e^{it'}$, avec $r, r' > 0$ et $t, t' \in \mathbb{R}$. En considérant les modules des deux membres de cette égalité, on obtient $r = r'$, d'où $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et l'assertion.

Remarque 4.4. En utilisant le fait (pas encore démontré) que la fonction exponentielle réelle est une surjection de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$, on déduit de ce qui précède que la fonction exponentielle complexe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une surjection sur \mathbb{C}^* . En effet, soit $z \in \mathbb{C}^*$. Puisque $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{iy}$. On a $|z| > 0$, d'où l'existence d'un nombre réel x tel que $e^x = |z|$, puis l'égalité $z = e^{x+iy}$ et l'assertion. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence

$$e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Si $z = 2i\pi k$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^z = (e^{2i\pi})^k = 1$. Inversement, posons $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. On a $e^z = e^x e^{iy}$. Si $e^z = 1$, vu que $e^x > 0$, on a $1 = e^x |e^{iy}| = e^x$, d'où $x = 0$ (on ne l'a pas encore justifié), puis $e^{iy} = 1$ et y est dans $2\pi\mathbb{Z}$.

Exemple 4.1. Soit t un nombre réel qui n'est pas dans $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Posons $z = 1 + e^{it}$. La forme trigonométrique de z est donnée par les égalités

$$z = 2 \cos \frac{t}{2} e^{\frac{it}{2}} \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[,$$

$$z = -2 \cos \frac{t}{2} e^{i(\frac{t}{2} + \pi)} \quad \text{si} \quad t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[,$$

comme on le constate en utilisant la factorisation $1 + e^{it} = e^{\frac{it}{2}} (e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}})$.

Le théorème 4.6 permet de définir la notion d'argument d'un nombre complexe non nul. C'est l'objet du paragraphe suivant.

9. Argument

Considérons la relation binaire sur \mathbb{R} pour laquelle deux nombres réels x et y sont en relation si et seulement si $x - y$ appartient à $2\pi\mathbb{Z}$. C'est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} . L'ensemble quotient, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence, est noté $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout x réel, on note \bar{x} , ou bien $x + 2\pi\mathbb{Z}$, sa classe d'équivalence. Compte tenu de ce qui précède, on a l'énoncé suivant :

Théorème 4.7. *L'application $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow U$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par l'égalité*

$$\Psi(t + 2\pi\mathbb{Z}) = e^{it},$$

est une bijection de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur U .

Démonstration : Notons que l'application Ψ est bien définie car si $t - t'$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} = e^{it'}$. C'est application est surjective (th. 4.6). Par ailleurs, si $e^{it} = e^{it'}$, alors $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (cor. 4.6) i.e. $t + 2\pi\mathbb{Z} = t' + 2\pi\mathbb{Z}$, donc Ψ est injective, d'où le résultat.

Définition 4.7. *Soit z un nombre complexe non nul. On appelle argument de z , et on note $\text{Arg}(z)$, l'image de $\frac{z}{|z|}$ par Ψ^{-1} . Autrement dit, on a*

$$\text{Arg}(z) = \Psi^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

L'argument d'un nombre complexe non nul z est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. C'est donc un ensemble de nombres réels. On appellera tout représentant de cette classe *un* argument de z . Deux tels représentants diffèrent par un multiple entier de 2π . On a ainsi (cor. 4.8)

$$(39) \quad z = re^{it} \quad \text{où} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(z) = t + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Avant d'énoncer les propriétés essentielles de la notion d'argument, il convient de munir $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de sa structure naturelle de groupe quotient.

Le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

On définit sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une addition par l'égalité

$$(40) \quad \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Pour que cette définition ait un sens, il s'agit de vérifier qu'elle ne dépend pas des représentants choisis des classes de x et y . Soient x' et y' dans \mathbb{R} tels que $\bar{x} = \bar{x'}$ et $\bar{y} = \bar{y'}$. Il existe a et b dans \mathbb{Z} tels que

$$x - x' = 2a\pi \quad \text{et} \quad y - y' = 2b\pi.$$

On a $x + y - (x' + y') = 2(a + b)\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$, de sorte que les classes de $x + y$ et $x' + y'$ sont égales, d'où l'assertion.

Le couple $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. On l'appelle le groupe quotient de \mathbb{R} modulo $2\pi\mathbb{Z}$. Le fait que la loi $+$ soit associative et commutative résulte de l'associativité et de la commutativité de l'addition sur \mathbb{R} . L'élément neutre est la classe de 0 i.e. $2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'opposé de la classe de x est la classe de $-x$.

Le théorème 4.7 peut alors se reformuler de la façon suivante :

Théorème 4.8. *L'application $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow U$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par l'égalité*

$$\Psi(t + 2\pi\mathbb{Z}) = e^{it},$$

est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur U .

Le fait que Ψ soit un morphisme de groupes résulte de l'égalité $e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}$ pour tous réels t et t' .

Propriétés de l'argument

Proposition 4.9. *Soient z et z' des nombres complexes non nuls.*

- 1) *On a $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.*
- 2) *On a $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$.*
- 3) *On a $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$.*
- 4) *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$.*
- 5) *On a $\text{Arg}(-z) = (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) + \text{Arg}(z)$.*
- 6) *Si z est un nombre réel, on a $\text{Arg}(z) = 0$ si $z > 0$ et $\text{Arg}(z) = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ si $z < 0$.*
- 7) *On a $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)$.*

Démonstration : Posons $z = re^{it}$ et $z' = r'e^{it'}$ où $r, r', t, t' \in \mathbb{R}$. On a $r = |z|$ et $r' = |z'|$.

- 1) On a $zz' = rr'e^{i(t+t')}$ et $rr' = |zz'|$. Par suite, on a

$$\text{Arg}(zz') = \Psi^{-1}\left(\frac{zz'}{rr'}\right) = t + t' + 2\pi\mathbb{Z},$$

d'où $\text{Arg}(zz') = (t + 2\pi\mathbb{Z}) + (t' + 2\pi\mathbb{Z}) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.

- 2) On a l'égalité

$$\frac{1}{z} = \frac{e^{-it}}{r} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|},$$

d'où $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -t + 2\pi\mathbb{Z} = -\operatorname{Arg}(z)$.

3) Cette assertion résultent des deux premières.

4) Compte tenu de la seconde assertion, on peut supposer $n \geq 0$. L'égalité s'obtient alors par récurrence en utilisant la première assertion.

5) On a $-z = re^{it}e^{i\pi} = re^{i(t+\pi)}$ et $|-z| = r$, d'où $\Psi^{-1}\left(-\frac{z}{r}\right) = t + \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

6) Vu l'assertion 5, on peut supposer $z > 0$. On a $\sin t = 0$, d'où $t \in \pi\mathbb{Z}$, et $z = r \cos t$. Puisque z est positif, t est donc dans $2\pi\mathbb{Z}$, d'où $\operatorname{Arg}(z) = 0$.

7) On a $z\bar{z} > 0$, et les assertions 1 et 6 impliquent le résultat.

Exemple 4.2. Vérifions que l'on a

$$(41) \quad \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

On écrit pour cela que $(1+i)^2 = 2i$. Puisque $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, il en résulte que

$$2 \operatorname{Arg}(1+i) = \operatorname{Arg}(2) + \operatorname{Arg}(i) = \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si t est un argument de $1+i$, on a donc $2(t + 2\pi\mathbb{Z}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, de sorte qu'un argument de $1+i$ est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$. Puisque l'on a $\sin \frac{\pi}{4} \geq 0$ et $\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} < 0$ (prop. 4.8), cela entraîne (41). De l'égalité $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, on déduit alors que l'on a

$$(42) \quad \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10. Équations algébriques

On admettra ici le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.9 (d'Alembert-Gauss). *Soit n un entier naturel non nul. Toute équation*

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0,$$

où les coefficients a_i sont dans \mathbb{C} , possède au moins une racine dans \mathbb{C} .

Autrement dit, tout polynôme à une indéterminée, à coefficients dans \mathbb{C} , et non constant, possède au moins une racine dans \mathbb{C} . On dit que \mathbb{C} est algébriquement clos. La démonstration de ce résultat relève principalement de l'analyse plutôt que de l'algèbre. Signalons le cas simple suivant :

Proposition 4.10. *Tout polynôme à coefficients réels, de degré impair, possède au moins une racine réelle.*

Démonstration : C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ où les a_i sont réels, avec n impair et $a_n > 0$ (ce n'est pas restrictif). Elle est continue et l'on a

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

Pour t assez grand positif on a donc $f(t) > 0$, et pour t assez petit négatif on a $f(t) < 0$, d'où l'existence d'un zéro de f .

On va donner dans ce qui suit des exemples de résolution d'équations algébriques.

1. Nombre de racines d'une équation polynomiale dans \mathbb{C}

Comme conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss, démontrons d'abord qu'une équation polynomiale à coefficients dans \mathbb{C} de degré n possède exactement n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité. Rappelons à ce sujet que si F est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de F , alors $X - a$ divise F , et l'ordre de multiplicité de a pour F est le plus grand entier $r \geq 1$ tel que $(X - a)^r$ divise F . Si $r = 1$, on dit que a est une racine simple de F , et si $r \geq 2$, on dit que a est une racine multiple de F .

Théorème 4.10. *Soit F un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n . Alors, F possède dans \mathbb{C} exactement n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité. Autrement dit, soient a_1, \dots, a_t les racines de F distinctes deux à deux et r_1, \dots, r_t leurs multiplicités respectives. On a $t \leq n$ et la somme des r_i est n .*

Démonstration : On procède par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors F est un nombre complexe non nul, donc ne possède aucune racine et le résultat est démontré dans ce cas. Supposons $n \geq 1$ et le résultat démontré pour les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n - 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, F possède une racine $a \in \mathbb{C}$. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $F = (X - a)Q$. Le degré de Q est $n - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, Q possède au plus $n - 1$ racines. Les racines de F étant a et celles de Q , le nombre de racines de F est donc au plus n . Par ailleurs, Q ayant exactement $n - 1$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité, cela entraîne le résultat pour F .

2. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 4.8. *Soient n un entier naturel non nul et z un nombre complexe. On appelle racine n -ième de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$.*

Proposition 4.11. *Tout nombre complexe non nul possède exactement n racines n -ièmes distinctes deux à deux. Plus précisément, soit z un nombre complexe non nul, de module r*

et d'argument $t + 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $\sqrt[n]{r}$ l'unique racine n -ième réelle positive de r . Alors, l'ensemble des racines n -ièmes de z est

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{it}{n} + \frac{i2k\pi}{n}\right) \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Démonstration : Soit $\mu_n(z)$ l'ensemble des racines n -ièmes de z . On a $z = re^{it}$ et les éléments explicités ci-dessus sont dans $\mu_n(z)$. Inversement, si k et k' sont deux entiers distincts entre 0 et $n-1$, on a $e^{\frac{i2k\pi}{n}} \neq e^{\frac{i2k'\pi}{n}}$, donc $\mu_n(z)$ est de cardinal au moins n . Le théorème 4.10 entraîne alors l'assertion.

Une racine n -ième de 1 s'appelle une racine n -ième de l'unité. On notera μ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Vu que l'on a $\text{Arg}(1) = 2\pi\mathbb{Z}$ (prop. 4.9), on obtient :

Corollaire 4.9. *Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble μ_n est de cardinal n et l'on a*

$$\mu_n = \left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

L'ensemble μ_n est un sous-groupe de \mathbb{C}^* d'ordre n . On obtient ainsi tous les sous-groupes finis de \mathbb{C}^* .

Proposition 4.12. *Les sous-groupes finis de \mathbb{C}^* sont les μ_n où $n \geq 1$.*

Démonstration : Soit H un sous-groupe fini de \mathbb{C}^* d'ordre n . Pour tout $z \in H$, on a $z^n = 1$, de sorte que H est contenu dans μ_n . Puisque H et μ_n ont le même ordre, on a donc $H = \mu_n$.

Exemples 4.3.

1) Les racines cubiques de l'unité sont les racines du polynôme $X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Celles autres que 1 sont $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Ce sont donc les racines du polynôme $X^2 + X + 1$. Il en résulte que l'on a

$$(43) \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(44) \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

En effet, on a

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

d'où $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. De l'égalité $\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\cos \frac{2\pi}{3}$, on déduit alors que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. La relation $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1$ et le fait que la fonction sinus soit positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ entraînent alors (43). Par ailleurs, on a

$$\cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 1 \quad \text{i.e.} \quad \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}.$$

Là encore, les fonctions sinus et cosinus étant positives sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit (44).

2) Vérifions que l'on a

$$(45) \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

L'élément $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}} \in \mu_5$ est racine du polynôme $F = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \in \mathbb{C}[X]$. En posant

$$Y = X + \frac{1}{X},$$

on a l'égalité

$$F = X^2(Y^2 + Y - 1),$$

et $\zeta + \zeta^{-1}$ est donc racine du polynôme $Y^2 + Y - 1 \in \mathbb{C}[Y]$. Le fait que $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$ soient positifs entraînent alors (45).

3) En utilisant (41) et (44) on déduit que l'on a

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}},$$

d'où les égalités

$$(46) \quad \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

3. L'équation du second degré

Tout nombre complexe possède une racine carrée (prop. 4.11). Rappelons l'énoncé bien connu suivant :

Proposition 4.13. *Soient a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit δ une racine carrée dans \mathbb{C} de $b^2 - 4ac$. Les racines complexes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont*

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

4. L'équation du troisième degré

Soient a, b, c, d des nombres complexes avec $a \neq 0$. On se propose ici d'établir les formules de Cardan concernant la résolution de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

En posant

$$x = z - \frac{b}{3a},$$

on se ramène à la résolution de l'équation

$$(47) \quad z^3 + pz + q = 0,$$

avec

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad q = \frac{b}{27a} \left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a}.$$

Les expressions donnant les racines de l'équation (47) s'appellent les formules de Cardan. Décrivons les dans l'énoncé qui suit. Posons, comme il est d'usage,

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Théorème 4.11 (Formules de Cardan). *Soient p et q des nombres complexes. Soit δ un nombre complexe tel que*

$$\delta^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Il existe $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que l'on ait

$$(48) \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \delta, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \delta \quad \text{et} \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Soit (u, v) un élément de \mathbb{C}^2 vérifiant (48). Dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X]$ on a l'égalité

$$(49) \quad X^3 + pX + q = (X - (u + v))(X - (ju + j^2v))(X - (j^2u + jv)).$$

En particulier, l'ensemble des racines de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ est

$$\left\{ u + v, ju + j^2v, j^2u + jv \right\}.$$

Remarque 4.5. L'ensemble annoncé des racines ne dépend pas du choix d'une racine carrée de $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$, ni de celui d'un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant les égalités (48).

Démonstration : Vérifions qu'il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ réalisant la condition (48). Supposons $p \neq 0$. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = -\frac{q}{2} + \delta$ (un tel nombre complexe u existe d'après la proposition 4.11). On a $u \neq 0$. En posant

$$v = -\frac{p}{3u},$$

de sorte que $3uv = -p$, on obtient

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \delta,$$

et (u, v) vérifie (48). Supposons $p = 0$. Il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^3 = -q$. On a $\delta = \pm \frac{q}{2}$. Si $\delta = \frac{q}{2}$, le couple $(0, w)$ vérifie (48), et si $\delta = -\frac{q}{2}$, il en est ainsi de $(w, 0)$, d'où l'assertion. L'égalité (49) se vérifie alors directement, d'où le théorème.

Remarque 4.6. Une idée permettant de comprendre comment les formules de Cardan ont été découvertes est la suivante. Notons α, β et γ les racines de $X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ et posons

$$r = \alpha + j\beta + j^2\gamma \quad \text{et} \quad s = \alpha + j^2\beta + j\gamma.$$

On a

$$X^3 + pX + q = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma),$$

d'où il résulte les relations suivantes :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \text{et} \quad \alpha\beta\gamma = -q.$$

On en déduit les égalités

$$rs = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = -3p.$$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = r \\ \alpha + j^2\beta + j\gamma = s, \end{cases}$$

on obtient

$$(50) \quad \alpha = \frac{r+s}{3}, \quad \beta = \frac{j^2r + js}{3}, \quad \gamma = \frac{jr + j^2s}{3}.$$

Des égalités $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ et $rs = -3p$, on déduit alors que

$$r^3 + s^3 = -27q.$$

Ainsi, r^3 et s^3 sont racines du polynôme

$$X^2 + (27q)X - 27p^3 \in \mathbb{C}[X].$$

Par suite, on a

$$\left(\frac{r}{3}\right)^3 = -\frac{q}{2} + \varepsilon\delta, \quad \left(\frac{s}{3}\right)^3 = -\frac{q}{2} - \varepsilon\delta \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1,$$

de sorte que l'un des couples $(\frac{r}{3}, \frac{s}{3})$ et $(\frac{s}{3}, \frac{r}{3})$ vérifie (48). Les égalités (50) permettent alors de trouver α , β et γ .

Corollaire 4.10. *Soient p et q des nombres réels. Posons*

$$F = X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad \Delta = -(4p^3 + 27q^2).$$

- 1) Si $\Delta > 0$, alors F a trois racines réelles distinctes.
- 2) Si $\Delta < 0$, alors F a une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
- 3) Si $\Delta = 0$, on a

$$F = \left(X + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(X - \frac{3q}{p}\right) \quad \text{si} \quad p \neq 0 \quad \text{et} \quad F = X^3 \quad \text{si} \quad p = 0.$$

Démonstration : On reprend les notations de l'énoncé du théorème 4.11. On a

$$\delta^2 = -\frac{\Delta}{108}.$$

1) Supposons $\Delta > 0$. On a $p \neq 0$. Par ailleurs, on a $\delta^2 < 0$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = -t^2$, d'où $\delta = \pm it$. Si $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ vérifie (48), les nombres complexes u^3 et v^3 sont donc conjugués et non nuls. On a ainsi

$$\left(\frac{\bar{u}}{v}\right)^3 = 1.$$

Puisque $uv = -\frac{p}{3}$ est réel, il en est de même de $\frac{\bar{u}u}{uv} = \frac{\bar{u}}{v}$. On en déduit que $\bar{u} = v$, et parce que j et j^2 sont conjugués, les racines de F sont donc réelles. Par ailleurs, on vérifie qu'elles sont distinctes deux à deux : si $u + v = ju + j^2v$, on obtient $u = j^2v$, d'où $u^3 = v^3 = \bar{u}^3$, et donc u^3 est réel, ce qui n'est pas car $\delta \neq 0$. Le même argument montre que l'on a $u + v \neq j^2u + jv$ et $ju + j^2v \neq j^2u + jv$, d'où la première assertion.

2) Supposons $\Delta < 0$. Dans ce cas, on a $\delta^2 > 0$, de sorte que δ est réel, et il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que la condition (48) soit réalisée. En effet, on prend pour u et v les racines cubiques réelles respectivement de $-\frac{q}{2} + \delta$ et de $-\frac{q}{2} - \delta$ et, p étant réel, on a nécessairement $3uv = -p$. Les nombres complexes $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont alors conjugués. Ils ne sont pas réels, sinon ils seraient égaux, auquel cas on aurait $u = v$, d'où $u^3 = v^3$, puis $\delta = 0$, ce qui conduit à une contradiction, d'où la seconde assertion.

3) Si $\Delta = 0$, on a alors $\delta = 0$. Si $p \neq 0$, on vérifie directement l'égalité annoncée. Si $p = 0$, on a $q = 0$ et $F = X^3$.

Exemple 4.4. Explicitons les racines du polynôme $F = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. En reprenant les notations utilisées dans le corollaire, on a $\Delta = 3^4$ et $\delta^2 = -\frac{3}{4}$. Compte tenu du fait que l'on a (formules (43))

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

et en prenant $\delta = i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que le couple (u, v) avec $u = e^{\frac{i\pi}{9}}$ et $v = e^{-\frac{i\pi}{9}}$ vérifie la condition (48). Il en résulte que les racines de F sont

$$2 \cos \frac{\pi}{9}, \quad 2 \cos \frac{5\pi}{9} \quad \text{et} \quad 2 \cos \frac{7\pi}{9}.$$

On notera que si α est l'une de ces racines, les deux autres sont $-\alpha^2 + 2$ et $\alpha^2 - \alpha - 2$. Le fait de pouvoir exprimer rationnellement ces racines entre elles ne se produit pas en général. La théorie de Galois permet d'expliquer ce phénomène.

11. Interprétation géométrique

On utilise dans ce paragraphe les définitions de base de géométrie affine, notamment des plans affines euclidiens. Ces notions seront développées ultérieurement.

Soit E un plan affine euclidien de direction un plan vectoriel \vec{E} sur \mathbb{R} . Par définition, \vec{E} est muni d'un produit scalaire et on notera $\|\cdot\|$ la norme qui lui est associée. On dispose d'une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $P, Q \in E$ par

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

C'est une distance sur E . On suppose que l'espace vectoriel \vec{E} est orienté. Soit

$$\mathcal{R} = (O, (e_1, e_2))$$

un repère orthonormé direct. Le point O est l'origine du repère et (e_1, e_2) est une base orthonormée directe de \vec{E} . L'application $b_{\mathcal{R}} : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout point $M \in E$ par

$$b_{\mathcal{R}}(M) = x + iy \quad \text{où} \quad \overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2,$$

est une bijection de E sur \mathbb{C} . On dit que $z = x + iy$ est l'affixe de M et que M est l'image de z .

Lemme 4.14. Soient M et M' des points de E d'affixes respectives z et z' . L'affixe du point M'' tel que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$ est $z + z'$.

Démonstration : Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a les égalités $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$, $\overrightarrow{OM'} = x'e_1 + y'e_2$ et $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = (x + x')e_1 + (y + y')e_2$, d'où le lemme.

Si u, v sont des vecteurs non nuls de \vec{E} , on notera ici (u, v) l'angle orienté de u et v .

Lemme 4.15. Soient M un point de E et $z \in \mathbb{C}$ son affixe.

- 1) On a $d(O, M) = |z|$.
- 2) Si z est non nul, l'argument de z est la mesure de l'angle orienté $(e_1, \overrightarrow{OM})$.

Démonstration : 1) Posons $z = x + iy$. On a $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$, d'où les égalités $d(O, M) = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

2) On a $M \neq O$ (car $z \neq 0$). Il existe une unique rotation vectorielle r de \vec{E} telle que

$$r(e_1) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}.$$

Par ailleurs, il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que la matrice de r dans (e_1, e_2) soit

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Par définition, la mesure de l'angle orienté $(e_1, \overrightarrow{OM})$ est $t + 2\pi\mathbb{Z}$. Par ailleurs, on a

$$r(e_1) = \frac{xe_1 + ye_2}{|z|} = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2.$$

On a donc $x = |z| \cos t$ et $y = |z| \sin t$, d'où $z = |z|e^{it}$, puis $\text{Arg}(z) = t + 2\pi\mathbb{Z}$ et le résultat.

Plus généralement :

Lemme 4.16. Soient A, B, C trois points distincts de E et a, b, c leurs affixes respectives.

- 1) On a $d(A, B) = |b - a|$.
- 2) La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\text{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$.

Démonstration : 1) On a $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |b - a|$.

2) Dans le groupe des angles, on a l'égalité (relation de Chasles)

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, e_1) + (e_1, \overrightarrow{AC}).$$

La mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc la somme des mesures des angles $(\overrightarrow{AB}, e_1)$ et $(e_1, \overrightarrow{AC})$. Comme ci-dessus, il existe une unique rotation vectorielle r de \overrightarrow{E} telle que

$$r(e_1) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|},$$

et il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que la matrice de r dans (e_1, e_2) soit

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$r(e_1) = \frac{\operatorname{Re}(b-a)e_1 + \operatorname{Im}(b-a)e_2}{|b-a|} = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2,$$

d'où $b-a = |b-a|e^{it}$ et $t + 2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg}(b-a)$. On en déduit que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, e_1)$ est $-\operatorname{Arg}(b-a)$ et que celle de $(e_1, \overrightarrow{AC})$ est $\operatorname{Arg}(c-a)$, ce qui entraîne le résultat.

Applications

Proposition 4.14. *Soient A et B des points distincts de E . Soient M un point de E et a, b , et z les affixes respectives de A, B et M .*

- 1) *Les points A, B et M sont alignés si et seulement si $\frac{z-a}{b-a}$ est un nombre réel.*
- 2) *Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AM} sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z-a}{b-a}$ appartient à $i\mathbb{R}$.*

Démonstration : On peut supposer $M \neq A$.

1) Pour que M soit sur la droite affine passant par A et B il faut et il suffit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AM} soient colinéaires. Cette condition signifie que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ est nul ou plat, i.e. que sa mesure est $2\pi\mathbb{Z}$ ou $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, autrement dit, que $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)$ est $2\pi\mathbb{Z}$ ou $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ (lemme 4.16), d'où l'assertion.

2) Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ est un angle droit, autrement dit, si sa mesure est $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, d'où l'équivalence.

Démontrons comme seconde application la propriété dite de l'angle inscrit. Soient Ω un point de E et r un nombre réel strictement positif. Soit \mathcal{C} le cercle de centre Ω et de rayon r . Rappelons que \mathcal{C} est l'ensemble des points M de E tels que $d(\Omega, M) = r$. Notons ω l'affixe de Ω . On a (cf. th. 4.6)

$$(51) \quad b_{\mathcal{R}}(\mathcal{C}) = \left\{ \omega + re^{it} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est le cercle dans \mathbb{C} de centre ω et de rayon r .

Proposition 4.15. Soient A et B des points distincts de \mathcal{C} d'affixes respectives a et b . Soit M un point de E distinct de A et B et d'affixe z . On a l'équivalence

$$(52) \quad M \in \mathcal{C} \iff 2 \operatorname{Arg}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right).$$

Remarque 4.7. La condition (52) signifie que M appartient à \mathcal{C} si et seulement si la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ est deux fois celle de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Cette propriété s'énonce souvent en disant que «l'angle au centre est deux fois l'angle inscrit».

Démonstration : Il existe des réels α et β tels que

$$a = \omega + re^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = \omega + re^{i\beta}.$$

Supposons que M appartienne à \mathcal{C} , autrement dit, que $z \in b_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tels que $z = \omega + re^{it}$. On a

$$\frac{z-b}{z-a} = \frac{e^{it} - e^{i\beta}}{e^{it} - e^{i\alpha}} = \frac{1 - e^{i(\beta-t)}}{1 - e^{i(\alpha-t)}} = e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} \frac{\sin \frac{\beta-t}{2}}{\sin \frac{\alpha-t}{2}}.$$

Il en résulte que

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta-\alpha}{2} + \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Par suite, on a

$$2 \operatorname{Arg}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \beta - \alpha + 2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Arg}\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right).$$

Inversement, posons

$$t = \left| \frac{z-b}{z-a} \right|.$$

Par hypothèse, il existe $k \in \{0, 1\}$ tel que

$$(53) \quad \frac{z-b}{z-a} = te^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2} + k\pi\right)}.$$

En écrivant que l'on a

$$z - \omega = z - b + re^{i\beta} = (z-b) \left(1 + \frac{re^{i\beta}}{z-b}\right) = \frac{z-b}{z-a} \left(z-a + \frac{z-a}{z-b} re^{i\beta}\right),$$

et en utilisant l'égalité $z - \omega = z - a + re^{i\alpha}$, ainsi que (53), on obtient

$$z - \omega = re^{i\beta} \frac{1 - te^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + k\pi\right)}}{1 - te^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2} + k\pi\right)}}.$$

Vu que le numérateur et le dénominateur de la fraction ci-dessus sont conjugués, on a $|z - \omega| = r$, donc z appartient à $b_{\mathcal{R}}(\mathcal{C})$ i.e. $M \in \mathcal{C}$.

Transformations

L'ensemble des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est en bijection avec l'ensemble des applications de E dans E via la flèche

$$f \mapsto \tilde{f} = b_{\mathcal{R}}^{-1} \circ f \circ b_{\mathcal{R}}.$$

Notons que si f et g sont deux applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on a la relation

$$(54) \quad \widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}.$$

On va décrire ici l'interprétation géométrique \tilde{f} de certaines applications f définies sur \mathbb{C} ou \mathbb{C}^* à valeurs dans \mathbb{C} .

Lemme 4.17. *Soient a un nombre complexe et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z + a$. Alors \tilde{f} est la translation de vecteur \overrightarrow{OA} où A est l'image de a .*

Démonstration : Soient M un point de E et $z = x + iy$ son affixe. On a

$$\tilde{f}(M) = b_{\mathcal{R}}^{-1}(z + a),$$

d'où $\tilde{f}(M) = M'$ où $z + a$ est l'affixe de M' . On a donc $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM'}$ (lemme 4.14), puis $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$ i.e. $M' = M + \overrightarrow{OA}$, et le résultat.

Lemme 4.18. *Soient λ un nombre réel non nul et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \lambda z$. Alors \tilde{f} est l'homothétie de centre O et de rapport λ .*

Démonstration : Soient M un point de E et $z = x + iy$ son affixe. On a

$$\tilde{f}(M) = b_{\mathcal{R}}^{-1}(\lambda z).$$

On a donc $\tilde{f}(M) = M'$ où λz est l'affixe de M' , d'où $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ et l'assertion.

Lemme 4.19. *Soient u un nombre complexe de module 1 et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = uz$. Alors \tilde{f} est la rotation de centre O et de mesure d'angle $\text{Arg } u$.*

Démonstration : Soit M un point de E et $z = x + iy$ son affixe. On a

$$\tilde{f}(M) = b_{\mathcal{R}}^{-1}(uz).$$

Il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que $u = e^{it}$. On a $t + 2\pi\mathbb{Z} = \text{Arg } u$. Soit r la rotation affine de centre O et de mesure d'angle $\text{Arg } u$, et \vec{r} son application linéaire associée. La matrice de \vec{r} dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. On a ainsi

$$r(M) = M' \quad \text{où} \quad \overrightarrow{OM'} = \vec{r}(\overrightarrow{OM}) = (x \cos t - y \sin t)e_1 + (x \sin t + y \cos t)e_2.$$

Par suite, l'affixe de M' est $x \cos t - y \sin t + i(x \sin t + y \cos t) = uz$. On a donc $b_{\mathcal{R}}^{-1}(uz) = M'$ d'où $r = \tilde{f}$.

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 4.12. Soient a et b des nombres complexes et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = az + b.$$

- 1) Si $a = 0$, \tilde{f} est l'application constante qui à $M \in E$ associe l'image de b .
- 2) Si $a = 1$, \tilde{f} est la translation de vecteur \overrightarrow{OB} où B est l'image de b .
- 3) Supposons a distinct de 0 et 1. Soit $\Omega \in E$ le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$. Alors \tilde{f} est l'application composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$ avec la rotation de centre Ω et de mesure d'angle $\text{Arg } a$.

Démonstration : La première assertion est immédiate, quant à la seconde, elle résulte du lemme 4.17. Vérifions l'assertion 3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = |a|(uz) + b$ avec $u = \frac{a}{|a|}$. On a $|u| = 1$. Notons B l'image de b , $t_{\overrightarrow{OB}}$ la translation de vecteur \overrightarrow{OB} , $h(O, |a|)$ l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ et $R(O, \text{Arg } a)$ la rotation de centre O et de mesure d'angle $\text{Arg } a$. On déduit alors de la formule (54) et des lemmes ci-dessus que

$$\tilde{f} = t_{\overrightarrow{OB}} \circ h(O, |a|) \circ R(O, \text{Arg } a).$$

Par ailleurs, on a $\tilde{f}(\Omega) = \Omega$ car l'affixe de Ω est fixe par f . Ainsi, \tilde{f} est l'application affine qui fixe Ω , dont l'application linéaire associée est le composé de l'homothétie de rapport $|a|$ avec la rotation de mesure d'angle $\text{Arg } a$. Cela entraîne l'assertion, car deux applications affines qui coïncident en un point et qui ont la même application linéaire associée sont égales.

Lemme 4.20. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \bar{z}$. Alors \tilde{f} est la symétrie orthogonale d'axe la droite passant par O et de direction la droite vectorielle engendrée par e_1 .

Démonstration : Soient M un point de E et $z = x + iy$ son affixe. On a

$$\tilde{f}(M) = b_{\mathcal{R}}^{-1}(\bar{z}).$$

On a donc $\tilde{f}(M) = M'$ où $\overrightarrow{OM'} = xe_1 - ye_2$, d'où l'assertion vu que l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par e_1 est celle engendrée par e_2 .

Définition 4.9 (Inversion). Soient A un point de E et k un nombre réel non nul. On appelle inversion de pôle A et de puissance k l'application définie sur $E - \{A\}$ à valeurs dans $E - \{A\}$, qui à tout point M associe le point M' tel que

$$(55) \quad \overrightarrow{AM'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} \overrightarrow{AM}.$$

On notera que M' est distinct de A car tel est le cas de M , et que l'égalité (55) s'écrit

$$M' = A + \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} \overrightarrow{AM}.$$

De plus, f est une involution de $E - \{A\}$. En effet, soit M un point de $E - \{A\}$. Posons $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$. On a les égalités

$$\overrightarrow{AM''} = \frac{k}{\|\overrightarrow{AM'}\|^2} \overrightarrow{AM'} = \frac{k^2}{\|\overrightarrow{AM'}\|^2 \|\overrightarrow{AM}\|^2} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM},$$

d'où $M'' = M$.

Pour tous u et v dans \vec{E} , notons $(u|v)$ le produit scalaire de u et v .

Lemme 4.21. Soient A un point de E , k un nombre réel non nul et f l'inversion de pôle A et de puissance k . Soient M et M' des points de $E - \{A\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) on a $f(M) = M'$.
- 2) Les points A, M, M' sont alignés et l'on a $(\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM'}) = k$.

Démonstration : Supposons $f(M) = M'$. Compte tenu de l'égalité (55), les points A, M, M' sont alignés. Par ailleurs, on a

$$(\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM'}) = \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2} (\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM}) = k.$$

Inversement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$. On a

$$(\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{AM'}) = \lambda \|\overrightarrow{AM}\|^2 = k \quad \text{i.e.} \quad \lambda = \frac{k}{\|\overrightarrow{AM}\|^2},$$

d'où $f(M) = M'$.

Lemme 4.22. Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Alors \tilde{f} est l'inversion de pôle O et de puissance 1.

Démonstration : Soient M un point de $E - \{O\}$ et $z = x + iy$ son affixe. On a

$$\tilde{f}(M) = b_{\mathcal{R}}^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right).$$

Vu les égalités $\frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$ et $|z|^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2$, on a donc $\tilde{f}(M) = M'$ où

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{xe_1 + ye_2}{|z|^2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} \overrightarrow{OM}.$$

Corollaire 4.11. Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Alors \tilde{f} est le composé commutatif de l'inversion de pôle O et de puissance 1 avec la symétrie orthogonale d'axe la droite passant par O et de direction e_1 .

Démonstration : L'application f est le composé commutatif de la conjugaison complexe et de l'application $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. L'assertion résulte alors de la formule (54), en remplaçant les domaines définitions E et \mathbb{C} par $E - \{O\}$ et \mathbb{C}^* , ainsi que des lemmes 4.20 et 4.22.