

Chapitre XI - Géométrie euclidienne plane

Table des matières

1. Plans vectoriels euclidiens	1
2. Isométries vectorielles	4
3. Rotations - Symétries	6
4. Classification des isométries vectorielles	10
5. Angles orientés de vecteurs	12
6. Mesure des angles orientés	15
7. Plans affines euclidiens	18
8. Isométries affines	26
9. Classification des isométries affines	30
10. Groupe d'isométries d'un polygone régulier	31

1. Plans vectoriels euclidiens

Définition 11.1. *Un plan vectoriel euclidien E est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} , muni d'une application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, appelée produit scalaire, que l'on notera $(x, y) \mapsto (x|y)$, vérifiant les conditions suivantes :*

- 1) *pour tout $x \in E$, l'application $E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à y associe $(x|y)$ est linéaire.*
- 2) *Pour tout $y \in E$, l'application $E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $(x|y)$ est linéaire.*
- 3) *Pour tous $x, y \in E$, on a $(x|y) = (y|x)$.*
- 4) *Pour tout $x \in E$, on a $(x|x) \geq 0$ et la relation $(x|x) = 0$ implique $x = 0$.*

Exemple 11.1. L'espace \mathbb{R}^2 , muni du produit scalaire défini par l'égalité

$$((x, y)|(x', y')) = xx' + yy',$$

est un plan vectoriel euclidien.

Considérons désormais un plan vectoriel euclidien E .

Définition 11.2 (Orthogonalité). 1) Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux si $(x|y) = 0$.

2) Deux parties A et B de E sont dites orthogonales, et on note $A \perp B$, si pour tous $x \in A$ et $y \in B$ on a $(x|y) = 0$.

3) L'orthogonal d'une partie A de E , noté A^\perp , est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de A .

Comme conséquence directe de la définition, on obtient :

Lemme 11.1. Pour toute partie A de E , l'orthogonal de A est un sous-espace vectoriel de E . On a $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Mis à part le sous-espace nul et E lui même, les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension 1. Ce sont les droites de E .

Lemme 11.2. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a les égalités

$$\dim F + \dim F^\perp = 2, \quad E = F \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration : On a $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$, d'où le résultat si $F = \{0\}$ ou $F = E$. Supposons que F soit une droite de E . Soit e un vecteur directeur de F . On a $(e|e) \neq 0$. Posons

$$u = \frac{e}{\sqrt{(e|e)}}.$$

On a $(u|u) = 1$. Soit v un vecteur de E en dehors de F . Posons

$$w = v - (u|v)u.$$

On a $w \neq 0$ et $(w|u) = 0$, donc F^\perp est non nul. On a $F^\perp \neq E$, d'où $\dim F^\perp = 1$ et la première égalité. Puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$, il en résulte que l'on a $E = F + F^\perp$ puis $E = F \oplus F^\perp$. Par ailleurs, F est contenu dans $(F^\perp)^\perp$. D'après ce qui précède, on a $\dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = 2$, d'où $\dim (F^\perp)^\perp = \dim F$, puis la dernière égalité.

Pour tout sous-espace vectoriel F , F^\perp s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Définition 11.3 (Base orthonormée). Soit (u, v) une base de E . Elle est dite orthonormée si l'on a

$$(u|v) = 0 \quad \text{et} \quad (u|u) = (v|v) = 1.$$

Remarque 11.1. Il existe des bases de E qui sont orthonormées. En effet, soit u un vecteur de E tel que $(u|u) = 1$. L'orthogonal de la droite engendrée par u est une droite de E (lemme 11.2). Si v est un vecteur de cette droite tel que $(v|v) = 1$, alors (u, v) est une base orthonormée.

Proposition 11.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous x et y de E , on a*

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

De plus, on a $(x|y)^2 = (x|x)(y|y)$ si et seulement si le système (x, y) est lié.

Démonstration : Soient (u, v) une base orthonormée de E et x, y des vecteurs de E . Il existe a, b, c, d dans \mathbb{R} tels que $x = au + bv$ et $y = cu + dv$. On a

$$(x|y) = ac + bd, \quad (x|x) = a^2 + b^2, \quad (y|y) = c^2 + d^2.$$

La proposition 4.3 entraîne alors l'inégalité annoncée.

Si le système (x, y) est lié, on a $x = 0$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Dans les deux cas, on a $(x|y)^2 = (x|x)(y|y)$. Inversement, supposons cette égalité satisfaite. Si $y = 0$, alors (x, y) est lié. Supposons $y \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(x + \lambda y|x + \lambda y) = \lambda^2(y|y) + 2\lambda(x|y) + (x|x),$$

qui est un polynôme de degré 2 en λ . Son discriminant réduit est

$$(x|y)^2 - (x|x)(y|y) = 0.$$

Par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x + \lambda y|x + \lambda y) = 0$. On a alors $x + \lambda y = 0$, donc (x, y) est lié, d'où le résultat.

L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in E$ par l'égalité

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

est une norme sur E . Autrement dit, pour tous x et y dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- 1) $\|x\| \geq 0$ et la relation $\|x\| = 0$ implique $x = 0$,
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La troisième propriété est une conséquence de la proposition 11.1. Un vecteur de E de norme 1 est dit unitaire.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de définir la notion d'écart angulaire entre deux vecteurs non nuls de E .

Définition 11.4 (Écart angulaire). *Soient x et y des vecteurs non nuls de E . Le nombre réel*

$$\text{Arccos}\left(\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right)$$

s'appelle l'écart angulaire entre x et y .

Pour tous x et y non nuls dans E , le nombre réel $\frac{(x|y)}{||x|| ||y||}$ est dans $[-1, 1]$, et son image par la fonction arc cosinus appartient à $[0, \pi]$. Si θ est l'écart angulaire entre x et y , on a donc l'égalité

$$(1) \quad \cos \theta = \frac{(x|y)}{||x|| ||y||} \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, \pi].$$

2. Isométries vectorielles

Définition 11.5. Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est une isométrie de E si f conserve la norme, i.e. si l'on a $||f(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E$.

Remarque 11.2. Une isométrie est un endomorphisme injectif. C'est donc un automorphisme de E .

Proposition 11.2. Soit f un endomorphisme de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est une isométrie.
- 2) f conserve le produit scalaire, i.e. quels que soient $x, y \in E$ on a $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.
- 3) Il existe une base orthonormée dont l'image par f soit une base orthonormée.
- 4) L'image par f de toute base orthonormée est une base orthonormée.
- 5) Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice M de f vérifie ${}^tM = M^{-1}$, où tM est la matrice transposée de M .
- 6) Dans toute base orthonormée, la matrice M de f vérifie ${}^tM = M^{-1}$.

Démonstration : 1) \implies 2) : Cette implication résulte de l'égalité,

$$(u|v) = \frac{1}{4} \left(||u+v||^2 - ||u-v||^2 \right) \quad \text{pour tous } u, v \in E.$$

2) \implies 4) : Soit (u, v) une base orthonormée. On a les égalités $||f(u)|| = ||f(v)|| = 1$ et $(f(u)|f(v)) = 0$, donc $(f(u), f(v))$ est une base orthonormée.

4) \implies 6) : Soient (u, v) une base orthonormée et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans cette base. Puisque $(f(u), f(v))$ est une base orthonormée, on a $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$. Par ailleurs, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Les égalités précédentes entraînent alors ${}^tM = M^{-1}$.

6) \implies 5) : C'est une conséquence de l'existence des bases orthonormées.

5) \implies 3) : Soit (u, v) une base orthonormée dans laquelle la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de f vérifie ${}^tM = M^{-1}$. On a les égalités

$$a = \frac{d}{ad - bc}, \quad b = -\frac{c}{ad - bc}, \quad c = -\frac{b}{ad - bc}, \quad d = \frac{a}{ad - bc}.$$

On déduit de la première et de la troisième égalité, après multiplications respectives par b et d , que l'on a $ab + cd = 0$. En multipliant par a la première égalité et par c la troisième, on obtient $a^2 + c^2 = 1$. De même, en multipliant par b la seconde égalité et par d la quatrième, on déduit que $b^2 + d^2 = 1$. Cela prouve que $(f(u), f(v))$ est une base orthonormée.

3) \implies 1) : Soit (u, v) une base orthonormée telle que $(f(u), f(v))$ soit une base orthonormée. Soit x un vecteur de E . On a $x = au + bv$ où $a, b \in \mathbb{R}$, puis les égalités $(x|x) = a^2 + b^2 = (f(x)|f(x))$, d'où $\|x\| = \|f(x)\|$.

Cela termine la démonstration de la proposition.

Corollaire 11.1. *Le déterminant de toute isométrie vaut ± 1 .*

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition précédente.

Notation - Terminologie. On notera $O(E)$ l'ensemble des isométries de E . C'est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E . On l'appelle le groupe orthogonal de E . Les isométries dont le déterminant est 1 sont dites directes. Elles forment un sous-groupe, noté $O^+(E)$, de $O(E)$ (c'est le noyau du morphisme déterminant de $O(E)$ dans $\{\pm 1\}$). Les isométries de déterminant -1 sont dites indirectes. Leur ensemble, qui n'est pas un groupe, est noté $O^-(E)$.

Remarque 11.3. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Rappelons que les vecteurs colonnes de P sont les coordonnées des éléments de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} . L'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est P est une isométrie, vu que l'image de \mathcal{B} par f est par définition \mathcal{B}' (prop. 11.2). On a donc ${}^tP = P^{-1}$. En posant

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

on a les égalités

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \quad \text{et} \quad \det(P) = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

De plus, P^{-1} étant la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} , l'égalité ${}^tP = P^{-1}$ implique

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

On utilisera à la fin de ce chapitre l'énoncé suivant :

Lemme 11.3. *Soit f une isométrie de E . Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Démonstration : Il s'agit de prouver que l'on a

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp.$$

On remarque d'abord que l'on a

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) = 2,$$

par suite, on a (lemme 11.2)

$$\dim \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \dim \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp.$$

Il suffit alors de démontrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est contenu dans $\text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$, autrement dit, que si x et y sont des éléments respectivement de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et de $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$, on a $(x|y) = 0$. On a $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. Puisque f conserve le produit scalaire, on obtient

$$(x|y) = (x|f(z) - z) = (f(x)|f(z)) - (x|z) = 0,$$

d'où l'assertion.

3. Rotations - Symétries

Commençons par rappeler ce qu'est une rotation vectorielle plane.

Définition 11.6 (Rotation). *Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est une rotation s'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f soit de la forme*

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Lemme 11.3. *Les rotations sont des isométries directes.*

Démonstration : Considérons une rotation f de E et une base orthonormée dans laquelle la matrice de f soit de la forme (2). La transposée de cette matrice est son inverse, donc f est une isométrie. Son déterminant valant 1, c'est une isométrie directe.

Lemme 11.4. *Soient f une rotation et \mathcal{B} une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Soient \mathcal{B}' une base orthonormée et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . La matrice de f dans la base \mathcal{B}' est*

$$\begin{pmatrix} a & -b \det(P) \\ b \det(P) & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration : La matrice de f dans \mathcal{B}' est

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P.$$

On vérifie alors directement l'assertion en utilisant la remarque 11.3 et l'égalité $P^{-1} = {}^t P$.

Rappelons que deux bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de E sont dites de même sens si le déterminant de la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 est positif, et de sens contraire sinon.

Corollaire 11.2. *Soient f une rotation et \mathcal{B} une base orthonormée.*

- 1) *Il existe des nombres réels a et b tels que la matrice de f dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.*
- 2) *Dans toute base orthonormée de même sens que \mathcal{B} , la matrice de f ne change pas.*
- 3) *Dans toute base orthonormée de sens contraire à \mathcal{B} , la matrice de f est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.*

Démonstration : On le déduit directement du lemme précédent et de la remarque 11.3.

Corollaire 11.3. *Soient f une rotation et \mathcal{B} une base orthonormée. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que la matrice de f dans \mathcal{B} soit*

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soient a et b dans \mathbb{R} tels que la matrice de f soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On a $a^2 + b^2 = 1$. D'après le théorème 4.6, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a + ib = e^{i\theta}$, d'où $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$, et l'assertion d'existence. Par ailleurs, si $\theta' \in \mathbb{R}$ vérifie $\cos \theta = \cos \theta'$ et $\sin \theta = \sin \theta'$, alors $\theta - \theta'$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$ (cor. 4.6), d'où le résultat.

Remarque 11.4. Si l'on fixe une base orthonormée \mathcal{B} de E , ce qui revient à choisir une orientation de E , on rappellera cette notion plus loin, on peut alors parler de «la rotation d'angle θ ». Il s'agit de la rotation représentée dans toute base orthonormée \mathcal{B}' par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{si } \mathcal{B}' \text{ a le même sens que } \mathcal{B},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{si } \mathcal{B}' \text{ n'a pas le même sens que } \mathcal{B}.$$

La notion de rotation d'angle θ est alors bien définie, mais elle est néanmoins abusive car un angle n'est pas un nombre réel. On doit plutôt parler de la rotation d'angle de mesure

$\theta + 2\pi\mathbb{Z}$. Notons que si l'on fixe au départ une base orthonormée de sens contraire à \mathcal{B} , «la rotation d'angle θ » devient «la rotation d'angle $-\theta$ »

On utilisera les deux résultats suivants.

Lemme 11.5. *Soient u et v des vecteurs non nuls de E tels que $\|u\| = \|v\|$. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$.*

Démonstration : On peut supposer u et v unitaires. Soit w un vecteur unitaire orthogonal à u . Le système $\mathcal{B} = (u, w)$ est une base orthonormée. Notons a et b les coordonnées de v dans \mathcal{B} . Puisque v est unitaire, on a $a^2 + b^2 = 1$. Soit r la rotation de E représentée dans \mathcal{B} par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On a $r(u) = v$. Par ailleurs, si r' est une rotation telle que $r'(u) = v$, la première colonne de la matrice de r' dans \mathcal{B} est celle de M . Par suite, M est la matrice de r' dans \mathcal{B} , d'où $r = r'$.

Lemme 11.6. *Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Soient u et v des vecteurs non nuls de E tels que $\|u\| = \|v\|$ et r la rotation telle que $r(u) = v$. Soit $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ l'élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que la matrice de r dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. On a*

$$(3) \quad \cos \theta = \frac{(u|v)}{\|u\|^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\det(u, v)}{\|u\|^2},$$

où $\det(u, v)$ désigne le déterminant du système (u, v) dans la base \mathcal{B} .

Démonstration : Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $u = ae_1 + be_2$. On a

$$v = r(u) = (a \cos \theta - b \sin \theta)e_1 + (a \sin \theta + b \cos \theta)e_2.$$

On obtient $(u|v) = (a^2 + b^2) \cos \theta$, et $\det(u, v) = (a^2 + b^2) \sin \theta$, d'où les formules (3) vu que $a^2 + b^2 = \|u\|^2$.

Rappelons maintenant la définition des symétries droites.

Définition 11.7 (Symétrie droite). *Soit D une droite de E . La symétrie (orthogonale) par rapport à D , ou d'axe D , est l'endomorphisme de E égal à l'identité sur D , et moins l'identité sur D^\perp .*

Lemme 11.7. *Soient D une droite de E et S_D la symétrie par rapport à D . Il existe une base orthonormée dans laquelle S_D est représentée matriciellement par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $S_D \circ S_D = \text{Id}_E$ et S_D est une isométrie indirecte.*

Démonstration : Soit u (resp. v) est un vecteur unitaire de D (resp. de D^\perp). Alors (u, v) est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de S_D a la forme indiquée. De

plus, l'image de (u, v) par S_D est $(u, -v)$ qui est une base orthonormée. Le déterminant de S_D étant -1 , S_D est donc une isométrie indirecte de E . Le fait que $S_D \circ S_D$ soit l'identité de E est immédiat.

Remarque 11.5. Soient D une droite de E et S_D la symétrie d'axe D . L'ensemble des points fixes de S_D est D . En effet, soit z un vecteur de E tel que $S_D(z) = z$. On a $z = x + y$ où $x \in D$ et $y \in D^\perp$, d'où $S_D(z) = x - y$ puis $y = 0$ et z appartient à D . De même, si $z \in E$ vérifie $S_D(z) = -z$, alors z appartient à l'orthogonal de D .

Lemme 11.8. Soient f un endomorphisme de E et \mathcal{B} une base orthonormée de E . Alors, f est une symétrie par rapport à une droite si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et que la matrice de f dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Démonstration : Supposons que f soit une symétrie par rapport à une droite D . Soit u (resp. v) un vecteur unitaire de D (resp. de D^\perp). Le système (u, v) est une base orthonormée. Soit P la matrice de passage de la base (u, v) à la base \mathcal{B} . Compte tenu de la remarque 11.3, la matrice de f dans \mathcal{B} est

$${}^tP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on déduit que la matrice de f dans \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} \alpha^2 - \gamma^2 & \alpha\beta - \delta\gamma \\ \alpha\beta - \delta\gamma & \beta^2 - \delta^2 \end{pmatrix}$. Les égalités $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$ entraînent alors que la matrice de f dans \mathcal{B} est de la forme annoncée.

Inversement, supposons que la matrice de f dans \mathcal{B} soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Le rang de $f - \text{Id}_E$ est 1, donc le noyau de $f - \text{Id}_E$ est une droite D . Vérifions que f est la symétrie d'axe D . Les vecteurs de coordonnées dans \mathcal{B} , $(a+1, b)$ et $(b, 1-a)$ sont sur D . Puisqu'ils ne sont pas tous les deux nuls, l'un d'eux est une base de D . Par ailleurs, la droite D^\perp est engendrée par l'un des vecteurs de coordonnées $(-b, a+1)$ et $(a-1, b)$, et l'on constate que la restriction de f à D^\perp est moins l'identité, d'où l'assertion.

Lemme 11.9. Soient u et v des vecteurs non nuls de E tels que $\|u\| = \|v\|$. Il existe une unique symétrie droite s telle que $s(u) = v$. Si $u + v \neq 0$, son axe est la droite engendrée par $u + v$. Si $u = -v$, son axe est l'orthogonal de la droite engendrée par u .

Démonstration : C'est la même que celle du lemme 11.5. En effet, on peut supposer u et v unitaires. Si w un vecteur unitaire orthogonal à u , alors $\mathcal{B} = (u, w)$ est une base orthonormée. Soient a et b les coordonnées de v dans \mathcal{B} . On a $a^2 + b^2 = 1$. Soit s la symétrie représentée dans \mathcal{B} par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ (lemme 11.8). On a $s(u) = v$. Si s' est

une symétrie droite telle que $s'(u) = v$, la première colonne de la matrice de s' dans \mathcal{B} est celle de M , donc M est la matrice de s' dans \mathcal{B} , d'où $s = s'$.

Soit D l'axe de s . On a $s(u + v) = u + v$. Si $u + v \neq 0$, la droite D est donc engendrée par $u + v$ (remarque 11.5). Si $u = -v$, on a $s(u) = -u$ et D^\perp est engendré par u (*loc. cit.*), d'où l'assertion (lemme 11.2).

Le résultat précédent permet de définir la bissectrice d'un couple de vecteurs non nuls :

Définition 11.8 (Bissectrice de deux vecteurs). Soient u et v des vecteurs non nuls de E . La bissectrice du couple (u, v) est l'axe de la symétrie droite qui échange $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$.

4. Classification des isométries vectorielles

Démontrons que l'on a obtenu précédemment toutes les isométries de E .

Théorème 11.1. L'ensemble $O(E)$ est formé des rotations et des symétries par rapport à une droite. Les isométries directes sont les rotations et les isométries indirectes sont les symétries par rapport à une droite.

Démonstration : Soit f un élément de $O(E)$. Considérons une base orthonormée \mathcal{B} de E et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans \mathcal{B} . Notons ε le déterminant de M . On a $\varepsilon = ad - bc = \pm 1$. L'inverse de M est

$$M^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Puisque l'on a $M^{-1} = {}^t M$, on obtient $d = \varepsilon a$ et $b = -\varepsilon c$. Si $\varepsilon = 1$, on a

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

et dans ce cas, f est une rotation. Si $\varepsilon = -1$, on a $d = -a$ et $b = c$, d'où

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

et f est une symétrie par rapport à une droite (lemme 11.8), d'où le résultat.

Le groupe $O^+(E)$ est commutatif. Plus précisément, notons U le groupe des nombres complexes de module 1.

Proposition 11.3. Soit \mathcal{B} est une base orthonormée.

1) L'application $U \rightarrow O^+(E)$, qui à $a + ib \in U$ associe la rotation représentée dans \mathcal{B} par la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, est un isomorphisme de groupes de U sur $O^+(E)$.

2) L'application $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow O^+(E)$ qui à $t + 2\pi\mathbb{Z}$ associe la rotation représentée dans \mathcal{B} par $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $O^+(E)$.

Démonstration : Notons $\psi : U \rightarrow O^+(E)$ l'application définie dans l'énoncé. Les égalités $(a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(a'b + ab')$ et

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(a'b + ab') \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

entraînent que ψ est un morphisme de groupes. Il est visiblement injectif, et il est surjectif sur $O^+(E)$ (th. 11.1), d'où la première assertion. Par ailleurs, d'après le théorème 4.8, l'application $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow U$ qui à $t + 2\pi\mathbb{Z}$ associe e^{it} est un isomorphisme de groupes, d'où le résultat.

Lemme 11.10. *Toute rotation est composée de symétries droites. Plus précisément, soit σ une symétrie droite. Pour toute rotation r , il existe une unique symétrie droite τ telle que $r = \sigma \circ \tau$.*

Démonstration : Soit σ une symétrie droite. Posons $\tau = \sigma^{-1} \circ r$. Alors, τ est une isométrie de déterminant -1 , c'est donc une symétrie droite et on a l'égalité $r = \sigma \circ \tau$.

Lemme 11.11. *Soient α et β des éléments de $O(E)$.*

1) *Si $\alpha \in O^-(E)$ et $\beta \in O^+(E)$, on a $\alpha\beta\alpha = \beta^{-1}$.*

2) *Supposons que β soit une symétrie d'axe D . Alors $\alpha\beta\alpha^{-1}$ est la symétrie d'axe $\alpha(D)$.*

Démonstration : 1) L'élément $\alpha\beta$ est dans $O^-(E)$ donc est une symétrie droite. Par suite, $(\alpha\beta)^2$ est l'identité de E , d'où $\alpha\beta\alpha = \beta^{-1}$.

2) Puisque $\alpha\beta\alpha^{-1}$ est dans $O^-(E)$, c'est une symétrie par rapport à une droite D' . Il s'agit de vérifier que $D' = \alpha(D)$. Soit x un vecteur de D . On a

$$\alpha\beta\alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha\beta(x) = \alpha(x),$$

ainsi $\alpha(D)$ est contenu dans D' , d'où $D' = \alpha(D)$ car D' et $\alpha(D)$ ont la même dimension.

Proposition 11.4. *Soient u un vecteur unitaire, r une rotation et u' un vecteur unitaire de la bissectrice de $(u, r(u))$. Soit α la rotation telle que $\alpha(u) = u'$. On a l'égalité $r = \alpha^2$.*

Démonstration : Notons σ la symétrie par rapport à $D = \langle u \rangle$ et τ la symétrie par rapport à $D' = \langle u' \rangle$. On a $\tau(u) = r(u)$ i.e. $\tau^{-1}r(u) = u$. Puisque $\tau^{-1}r$ est dans $O^-(E)$ il en résulte que $\tau^{-1}r = \sigma$, d'où $r = \tau\sigma$. L'égalité $\alpha(u) = u'$ entraîne $\alpha(D) = D'$. On a donc (lemme 11.11, assertion 2)

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \tau.$$

On en déduit les égalités (lemme 11.11, assertion 1)

$$r = (\alpha\sigma\alpha^{-1})\sigma = \alpha(\sigma\alpha^{-1}\sigma) = \alpha^2.$$

5. Angles orientés de vecteurs

Notons S l'ensemble des vecteurs unitaires de E (la sphère unité de E). Considérons l'application

$$f : S \times S \rightarrow O^+(E)$$

qui à tout couple $(x, y) \in S \times S$ associe l'unique rotation r telle que $r(x) = y$ (f est bien définie d'après le lemme 11.5). Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence associée à f . Par définition, étant donnés deux éléments (x, y) et (x', y') de $S \times S$, on a

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff f((x, y)) = f((x', y')).$$

Autrement dit, (x, y) et (x', y') sont en relation modulo \mathcal{R} si et seulement si l'unique rotation qui envoie x sur y envoie aussi x' sur y' .

Définition 11.9 (Angle orienté). *L'ensemble quotient $(S \times S)/\mathcal{R}$ s'appelle l'ensemble des angles orientés de E . Pour tout $(x, y) \in S \times S$, la classe de (x, y) modulo \mathcal{R} est appelé l'angle orienté de x et y , on notera cette classe $\widehat{(x, y)}$.*

On étend la notion d'angle orienté à tout couple de vecteurs non nuls de E :

Définition 11.10. *Soient x et y deux vecteurs non nuls dans E . On appelle angle orienté de x et y , la classe modulo \mathcal{R} du couple $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \in S \times S$. On notera $\widehat{(x, y)}$ cet angle orienté.*

Posons $\mathcal{A} = (S \times S)/\mathcal{R}$ et notons $\bar{f} : \mathcal{A} \rightarrow O^+(E)$ l'application déduite de f par passage au quotient. On a

$$\bar{f}(\widehat{(x, y)}) = r,$$

où r est la rotation de E telle que $r(x) = y$.

Lemme 11.12. *L'application \bar{f} est une bijection de \mathcal{A} sur $O^+(E)$.*

Démonstration : Cette application est surjective car tel est le cas de f , et elle est par définition injective.

Définition 11.11 (Groupe des angles orientés). *Par transport de structure au moyen de \bar{f} , on munit \mathcal{A} d'une structure de groupe. Sa loi interne est définie par*

$$\widehat{(x, y)} + \widehat{(x', y')} = \bar{f}^{-1}(r \circ r'),$$

où r (resp. r') est la rotation telle que $r(x) = y$ (resp. $r'(x') = y'$). On dit que \mathcal{A} est le groupe des angles orientés de E .

Par définition, \bar{f} est un isomorphisme de groupes de \mathcal{A} sur $O^+(E)$.

Définition 11.12 (Angle d'une rotation). Soit r une rotation. L'angle de r est l'angle orienté $\bar{f}^{-1}(r)$.

Proposition 11.5. Soient x, y, x', y' des éléments de S .

- 1) Pour tout $x \in S$, l'élément neutre de \mathcal{A} est $\widehat{(x, x)}$. C'est l'angle nul de \mathcal{A} .
- 2) L'opposé de $\widehat{(x, y)}$ est $\widehat{(y, x)}$.
- 3) On a $\widehat{(x, y)} + \widehat{(y, x')} = \widehat{(x, x')}$ (relation de Chasles).
- 4) On a $\widehat{(x, y)} = \widehat{(x', y')}$ si et seulement si $\widehat{(x, x')} = \widehat{(y, y')}$
- 5) On a $\widehat{(x, y)} = \widehat{(x', y')}$ si et seulement si il existe $s \in O^-(E)$ telle que $s(x) = y'$ et $s(y) = x'$.

Démonstration : 1) La rotation $\bar{f}(\widehat{(x, x)})$ est l'identité de E , d'où $\widehat{(x, x)} = 0$.

2) Soit r la rotation telle que $r(x) = y$. On a $r^{-1}(y) = x$ et $\bar{f}(\widehat{(x, y)} + \widehat{(y, x)})$ est l'identité de E . Par suite, on a $\widehat{(x, y)} + \widehat{(y, x)} = 0$.

3) On a $\bar{f}(\widehat{(x, y)} + \widehat{(y, x')}) = r \circ r'$, où r (resp. r') est la rotation telle que $r(x) = y$ (resp. $r'(y) = x'$). Par ailleurs, on a $r \circ r'(x) = r' \circ r(x) = x'$, d'où $\bar{f}(\widehat{(x, x')}) = r \circ r'$ et l'assertion.

4) D'après la relation de Chasles, on a

$$\widehat{(x, y)} = \widehat{(x, x')} + \widehat{(x', y')} + \widehat{(y', y)},$$

d'où $\widehat{(x, y)} - \widehat{(x', y')} = \widehat{(x, x')} - \widehat{(y, y')}$ et l'équivalence.

5) Soient r et r' les rotations de E telles que

$$r(x) = y \quad \text{et} \quad r'(x') = y'.$$

Soit s la symétrie droite telle que

$$s(x) = y'.$$

Vérifions que l'on a l'équivalence

$$s(y) = x' \iff \widehat{(x, y)} = \widehat{(x', y')},$$

ce qui prouvera le résultat. On remarque pour cela que l'on a $s(y) = sr(x)$. Puisque $srs = r^{-1}$ (lemme 11.11), on obtient

$$s(y) = r^{-1}s(x) = r^{-1}r'(x').$$

On a donc

$$s(y) = x' \iff r^{-1}r'(x') = x'.$$

Par ailleurs, une rotation de E , autre que l'identité, n'a pas de vecteurs fixes non nuls. L'élément $r^{-1}r'$ est une rotation, par suite, on a

$$r^{-1}r'(x') = x' \iff r = r'.$$

Finalement, on a $s(y) = x'$ si et seulement si $r = r'$ i.e. $\widehat{(x, y)} = \widehat{(x', y')}$, d'où le résultat.

Proposition 11.6 (Angle plat - Angles droits).

- 1) Pour tout $x \in S$, $\widehat{(x, -x)}$ est l'unique élément d'ordre 2 de \mathcal{A} . C'est l'angle plat de \mathcal{A} . On le notera ω .
- 2) Soit (u, v) une base orthonormée. Les seuls éléments de \mathcal{A} dont le double est ω sont $\widehat{(u, v)}$ et $\widehat{(v, u)}$. On a $\widehat{(v, u)} = \widehat{(u, v)} + \omega$. On dit que ce sont les angles droits de \mathcal{A} .
- 3) Soient x et y des vecteurs non nuls de E . Ils sont colinéaires si et seulement si on a $\widehat{(x, y)} = 0$ ou $\widehat{(x, y)} = \omega$.
- 4) Soient x et y des vecteurs non nuls de E . Ils sont orthogonaux si et seulement si $\widehat{(x, y)}$ est un angle droit.

Démonstration : 1) Soit x un élément de S . On a $x \neq -x$, donc $\widehat{(x, -x)}$ n'est pas nul. Par ailleurs, on a $\bar{f}(\widehat{(x, -x)}) = -\text{Id}_E$, ce qui entraîne que $\widehat{(x, -x)}$ est d'ordre 2 dans \mathcal{A} . Vérifions que c'est le seul, ou ce qui revient au même, que la seule rotation d'ordre 2 est $-\text{Id}_E$. Si r est une rotation de E telle que $r^2 = \text{Id}_E$, il existe des réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$ et que $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2$ soit la matrice identité. On constate que cela entraîne $b = 0$ et $a = \pm 1$, d'où l'assertion.

2) Soit r la rotation telle que $r(u) = v$. D'après le corollaire 11.2, la matrice M de r dans la base (u, v) est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $r^2 = -\text{Id}_E$, par suite, on a les égalités $\bar{f}(2\widehat{(u, v)}) = -\text{Id}_E = \bar{f}(\omega)$, d'où $2\widehat{(u, v)} = \omega$. Si α est un élément de \mathcal{A} tel que $2\alpha = \omega$, on a alors $2\alpha = 2\widehat{(u, v)}$, d'où $2(\alpha - \widehat{(u, v)}) = 0$, puis d'après la première assertion, $\alpha = \widehat{(u, v)}$ ou bien $\alpha = \widehat{(u, v)} + \omega$. Par ailleurs, on a $2\widehat{(u, v)} + \omega = 2\omega = 0$, d'où l'égalité $-\widehat{(u, v)} = \widehat{(u, v)} + \omega$.

3) Supposons x et y colinéaires. Il existe $k \in \mathbb{R}$ non nul tel que $x = ky$. On a

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{k}{|k|} \frac{y}{\|y\|} = \pm \frac{y}{\|y\|},$$

donc l'angle de $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$, i.e. $\widehat{(x, y)} = 0$ ou ω . Inversement, si $\widehat{(x, y)} = 0$ ou ω , la rotation transformant $\frac{x}{\|x\|}$ en $\frac{y}{\|y\|}$ est $\pm \text{Id}_E$, ce qui entraîne que x et y sont colinéaires.

4) Supposons x et y orthogonaux. Dans ce cas, $(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})$ est une base orthonormée et par définition, $\widehat{(x, y)}$ est un angle droit. Inversement, si $\widehat{(x, y)}$ est un angle droit, $(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})$ est une base orthonormée, donc x et y sont orthogonaux.

On notera que pour définir la notion d'angle orienté, on n'a pas eu besoin de choisir une base orthonormée, autrement dit, de choisir une orientation de E . En revanche, cela va s'avérer nécessaire pour définir la notion de mesure d'un angle orienté. C'est l'objet du paragraphe suivant.

6. Mesure des angles orientés

Rappelons d'abord ce que l'on entend par orientation de E . Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , pas nécessairement orthonormées. Soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . On dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont de même sens, ou ont la même orientation, si le déterminant de P est positif. On définit ainsi une relation binaire dans l'ensemble des bases de E : \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont en relation si et seulement si elles ont la même orientation.

Lemme 11.13. *C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E . L'ensemble quotient possède deux classes d'équivalence.*

Démonstration : Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, P est l'identité, donc la relation est réflexive. De plus, P^{-1} est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} et $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P}$, de sorte que la relation est symétrique. Enfin, si \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' sont trois bases de E , P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et P' la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B}'' , alors la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'' est PP' et $\det(PP') = \det P' \det P$, donc la relation est transitive. La relation binaire considérée est donc une relation d'équivalence.

Par ailleurs, soit (u, v) une base fixée de E . Alors, (v, u) n'a pas la même orientation que (u, v) , et toute base de E a la même orientation que (u, v) ou (v, u) . En effet, la matrice de passage de (u, v) à (v, u) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son déterminant est $-1 < 0$. De plus, pour toute base (e, e') , si P est la matrice de passage de (e, e') à (u, v) , alors celle de (e, e') à (v, u) est $P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est $-\det P$. Cela entraîne le résultat, vu que $\det P$ ou $-\det P$ est positif.

Définition 11.13 (Orientation de E). *Orienter E consiste à choisir l'une de ces deux classes d'équivalence, en fixant une base de E . Toutes les bases de cette classe (i.e. celles qui ont la même orientation que la base fixée) sont dites directes, et les autres bases sont dites indirectes.*

Supposons désormais E orienté. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E de même norme. Soit r l'unique rotation de E telle que $r(x) = y$. D'après les corollaires 11.2 et 11.3,

il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que la matrice de r dans toute base orthonormée directe soit

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Définition 11.14 (Mesure des angles). La mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(x, y)}$ est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On dit souvent que $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ est la mesure de $\widehat{(x, y)}$ sans préciser qu'il s'agit de la mesure en radians. On dit aussi que θ est une mesure en radians, ou une mesure, de $\widehat{(x, y)}$. Elle est bien définie modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 11.6. Il existe d'autres mesures d'angles orientés, par exemple la mesure en degrés ou en grades. Si θ est une mesure en radians d'un angle orienté, alors $\frac{180\theta}{\pi}$ est une mesure de cet angle en degrés. Elle est bien définie modulo $360\mathbb{Z}$. De même, le nombre réel $\frac{200\theta}{\pi}$ est une mesure de cet angle en grades. Elle est bien définie modulo $400\mathbb{Z}$.

Exemple 11.1. La mesure de l'angle nul est $2\pi\mathbb{Z}$. Celle de l'angle plat est $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Les mesures des deux angles droits sont $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 11.7. Dans toute base orthonormée indirecte, la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si l'on change l'orientation de E , la mesure de $\widehat{(x, y)}$ est donc changée en son opposée.

Lemme 11.14. Soient u et v des vecteurs non nuls de E tels que $\|u\| = \|v\|$ et $t + 2\pi\mathbb{Z}$ la mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$. On a

$$\cos t = \frac{(u|v)}{\|u\|^2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{\det(u, v)}{\|u\|^2},$$

où $\det(u, v)$ est le déterminant de (u, v) dans toute base orthonormée directe.

Démonstration : Soit r la rotation telle que $r(u) = v$. La matrice de r dans toute base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (déf. 11.14). Le lemme 11.6 entraîne alors le résultat.

Remarques 11.8.

1) Indépendamment du résultat précédent, le déterminant d'un couple de vecteurs est le même dans toute base orthonormée directe. En effet, soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E (orthonormées ou non) et P la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 . Pour tous u et v dans E , en notant $\det_{\mathcal{B}_i}(u, v)$ le déterminant de (u, v) dans la base \mathcal{B}_i , on a l'égalité

$\det_{\mathcal{B}_1}(u, v) = \det P \det_{\mathcal{B}_2}(u, v)$. Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases orthonormées directes, on a $\det P = 1$, d'où l'assertion.

Rappelons à ce sujet que le produit mixte de E est l'application $m_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x, y) associe le déterminant du couple (x, y) dans toute base orthonormée directe. On a l'égalité

$$|m_E(x, y)| = \|x\| \|y\| \quad \text{si} \quad (x|y) = 0.$$

En effet, on peut supposer x et y non nuls, auquel cas $\mathcal{B} = \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$ est une base orthonormée de E . Si \mathcal{B} est une base directe, les coordonnées de x et y dans cette base étant respectivement $\|x\|$ et $\|y\|$, on obtient l'égalité. Si \mathcal{B} est indirecte, en considérant la base orthonormée directe $\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)$, on obtient $m_E(x, y) = -\|x\| \|y\|$, et le résultat.

2) Soient u et v des vecteurs non nuls de E de même norme et $t + 2\pi\mathbb{Z}$ la mesure de l'angle $\widehat{(u, v)}$. Le représentant de $t + 2\pi\mathbb{Z}$ dans $] -\pi, \pi]$ s'appelle parfois la mesure principale de $\widehat{(u, v)}$. D'après la formule (1) et le lemme 11.14, l'écart angulaire entre u et v est donc la valeur absolue de la mesure principale de $\widehat{(u, v)}$.

Lemme 11.15. *Soit f une rotation de E . Soient u et v deux vecteurs non nuls de E tels que $f(u) = v$. La mesure de l'angle de f est la mesure de $\widehat{(u, v)}$.*

Démonstration : L'angle de f est l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$ (déf. 11.12).

Lemme 11.16. *Soit t un nombre réel. La rotation représentée dans toute base orthonormée directe par la matrice*

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

est d'angle de mesure $t + 2\pi\mathbb{Z}$. On l'appelle parfois, par abus, la rotation d'angle t .

Démonstration : Soit f la rotation considérée dans l'énoncé. Si u et v sont deux vecteurs de E tels que $f(u) = v$, la mesure de $\widehat{(u, v)}$ est par définition $t + 2\pi\mathbb{Z}$, qui est la mesure de l'angle de f .

Lemme 11.17. *Soient t et t' des nombres réels.*

1) *La rotation d'angle t composée avec la rotation d'angle t' est celle d'angle $t + t'$.*

2) *Soient x, y, x', y' des vecteurs non nuls de E tels que $t + 2\pi\mathbb{Z}$ soit la mesure de $\widehat{(x, y)}$ et que $t' + 2\pi\mathbb{Z}$ soit celle de $\widehat{(x', y')}$. Alors, la mesure de $\widehat{(x, y)} + \widehat{(x', y')}$ est $t + t' + 2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration : 1) Posons

$$M = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} \cos t' & -\sin t' \\ \sin t' & \cos t' \end{pmatrix}.$$

La première assertion résulte de l'égalité

$$MM' = \begin{pmatrix} \cos(t + t') & -\sin(t + t') \\ \sin(t + t') & \cos(t + t') \end{pmatrix}.$$

2) On peut supposer x, y, x', y' unitaires. Soient r et r' les rotations telles que $r(x) = y$ et $r'(x') = y'$. Par définition, l'angle de $r \circ r'$ est $\widehat{(x, y)} + \widehat{(x', y')}$. L'assertion 1 entraîne alors le résultat.

Définissons ce que l'on appelle «le cosinus et le sinus d'un angle».

Définition 11.15 (Cosinus et sinus d'un angle). Soient u et v des vecteurs non nuls de E . Soit t une mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$, qui est bien définie modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

1) On appelle cosinus de $\widehat{(u, v)}$ le nombre réel $\cos t$.

2) On appelle sinus de $\widehat{(u, v)}$ le nombre réel $\sin t$.

Remarque 11.9. Compte tenu du lemme 11.14, le cosinus de $\widehat{(u, v)}$ ne dépend pas du choix de l'orientation de E , mais le sinus de $\widehat{(u, v)}$ en dépend. Si l'on change d'orientation de E , le sinus de $\widehat{(u, v)}$ est changé en son opposé (remarque 11.7).

7. Plans affines euclidiens

Considérons un plan affine E de direction \vec{E} .

Rappelons que pour tout $A \in E$, l'application $\alpha_A : E \rightarrow \vec{E}$ définie pour tout $M \in E$ par l'égalité

$$\alpha_A(M) = \overrightarrow{AM},$$

est une bijection de E sur \vec{E} . De plus, pour tous A, B, C dans E , on a la relation de Chasles $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Définition 11.16. On dit que E est un plan affine euclidien si \vec{E} est muni d'une structure de plan vectoriel euclidien.

On suppose désormais que E est un plan affine euclidien. Pour tous u et v dans \vec{E} , on notera $(u|v)$ ou bien $u.v$ le produit scalaire de u et v . La norme $\|\cdot\|$ sur \vec{E} permet de définir l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $P, Q \in E$ par

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

C'est une distance sur E , autrement dit, pour tous $P, Q, R \in E$, on a :

- 1) $d(P, Q) \geq 0$ et la relation $d(P, Q) = 0$ implique $P = Q$.
- 2) $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- 3) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Rappelons quelques définitions et résultats de base, notamment concernant les triangles de E .

Définition 11.17. Deux droites affines de E sont dites orthogonales si leurs espaces directeurs le sont.

Définition 11.18 (Médiatrice d'un bipoint). Soient P et Q deux points distincts de E . La médiatrice du bipoint (P, Q) est l'ensemble des points de E équidistants de P et Q .

Lemme 11.18. Soient P et Q deux points distincts de E et D la médiatrice de (P, Q) . Soit I le milieu de (P, Q) . On a

$$(4) \quad D = \left\{ M \in E \mid \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \right\}.$$

De plus, D est la droite passant par I et de direction l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par \overrightarrow{PQ} .

Démonstration : Pour tout $M \in E$, on a

$$\overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}}{2},$$

d'où

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}}{2} \right) \cdot (\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}) = \frac{\|\overrightarrow{MQ}\|^2 - \|\overrightarrow{MP}\|^2}{2}.$$

Cela prouve l'égalité (4). Par ailleurs, I appartient à D et l'on a

$$\alpha_I(D) = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp.$$

Ainsi D est un sous-espace affine de E et c'est la droite passant par I de direction $\langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp$.

Définition 11.19 (Cercle). Soient P un point de E et r un nombre réel positif. L'ensemble des points $M \in E$ tels que $d(M, P) = r$ est appelé le cercle de centre P et de rayon r .

Proposition 11.6 (Cercle circonscrit à un triangle). Soit $\{A, B, C\}$ un triangle de E . Il existe un unique cercle passant par A , B et C . Il est appelé le cercle circonscrit au triangle $\{A, B, C\}$. Son centre est le point concours des médiatrices de (A, B) , (A, C) et (B, C) .

Démonstration : Les points A, B, C n'étant pas alignés, les médiatrices de (A, B) et (A, C) ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point O . On a les égalités

$$d(O, A) = d(O, B) = d(O, C),$$

par suite A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon $d(O, A)$, et O est le point de concours des trois médiatrices du triangle. Par ailleurs, le centre d'un cercle passant par A, B, C appartient à ces médiatrices, c'est donc le point O , d'où l'unicité annoncée.

Proposition 11.7 (Cercle orthoptique d'un bipoint). Soient A et B des points de E et O le milieu de (A, B) . Le cercle de centre O passant par A et B est l'ensemble des points $M \in E$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. On l'appelle le cercle orthoptique de (A, B) .

Démonstration : Soit M un point de E . On a les égalités

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) \cdot (-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}).$$

Par suite, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = d(O, M)^2 - d(O, A)^2,$$

ce qui entraîne l'assertion.

Définition 11.20. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle de E . On dit qu'il est équilatéral si l'on a $d(A, B) = d(A, C) = d(B, C)$. On dit qu'il est isocèle en A si l'on a $d(A, B) = d(A, C)$.

Proposition 11.8. Un triangle est équilatéral si et seulement si le centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité.

Démonstration : Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Notons O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et I le milieu de (B, C) .

Supposons $\{A, B, C\}$ équilatéral. On a $d(A, B) = d(A, C)$. La médiatrice de (B, C) passe par A et I . Par ailleurs, I et A sont par définition sur la médiane issue de A . Ces deux droites sont donc égales, car il existe une unique droite passant par deux points distincts. Il en résulte que les médianes et les médiatrices du triangle sont confondues. Puisque les médianes de $\{A, B, C\}$ se coupent en G (cor. 10.5), on a donc $O = G$ (prop. 11.6).

Inversement, supposons $O = G$. La médiatrice de (B, C) passe par I et G (car $O = G$) et la médiane issue de A passe aussi par I et G . On a $I \neq G$ car G n'est pas sur la droite $\langle B, C \rangle$. Ces deux droites sont donc les mêmes, par suite A est sur la médiatrice de (B, C) , d'où $d(A, B) = d(A, C)$. De même, on montre que $d(A, B) = d(B, C)$, d'où le résultat.

Définition 11.21 (Hauteurs d'un triangle). Soit $\{A, B, C\}$ un triangle de E . La hauteur issue de A (resp. B , C) est la droite passant par A (resp. B , C) et de direction l'orthogonal de la droite engendrée par \overrightarrow{BC} (resp. \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB}). Ce sont les trois hauteurs du triangle $\{A, B, C\}$.

Proposition 11.9. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle.

Démonstration : Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Puisque A, B, C ne sont pas alignés, les hauteurs ne sont pas parallèles. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B . On a

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$

Afin de prouver que H est sur la hauteur issue de C , il s'agit de vérifier que l'on a

$$(5) \quad \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Pour cela, on écrit que l'on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}), & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}), \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}). \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0,$$

ce qui établit (5).

Définissons dans ce qui suit les bissectrices «intérieures» d'un triangle. Nous ne parlerons pas ici de bissectrices «extérieures».

Définition 11.22 (Bissectrices d'un triangle). Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Posons

$$a = d(B, C), \quad b = d(A, C) \quad \text{et} \quad c = d(A, B).$$

- 1) La bissectrice de $\{A, B, C\}$ issue de A est la droite passant par A et de direction la droite engendrée par $\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}$.
- 2) La bissectrice de $\{A, B, C\}$ issue de B est la droite passant par B et de direction la droite engendrée par $\frac{\overrightarrow{BA}}{c} + \frac{\overrightarrow{BC}}{a}$.
- 3) La bissectrice de $\{A, B, C\}$ issue de C est la droite passant par C et de direction la droite engendrée par $\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \frac{\overrightarrow{CB}}{a}$.

Remarque 11.10. La bissectrice issue de A est la droite passant par A et de direction la bissectrice du couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (déf. 11.8 et lemme 11.9).

Rappelons qu'étant donnée une droite D de E , la projection orthogonale sur D est le morphisme affine de E qui fixe les points de D , dont la restriction à \overrightarrow{D}^\perp de l'application linéaire associée est nulle. Avec les notations de la définition précédente :

Proposition 11.10 (Cercle inscrit dans un triangle). Soit I le barycentre du système (A, a) , (B, b) et (C, c) .

- 1) Les trois bissectrices du triangle $\{A, B, C\}$ sont concourantes au point I .
- 2) Soient P (resp. Q , R) la projection orthogonale de I sur la droite (A, B) (resp. (A, C) , (B, C)). On a

$$d(I, P) = d(I, Q) = d(I, R).$$

Le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $\{P, Q, R\}$. On l'appelle le cercle inscrit dans le triangle $\{A, B, C\}$.

Démonstration : 1) On a l'égalité

$$(a + b + c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AI} et $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires. Par suite, \overrightarrow{AI} est aussi colinéaire à

$$\frac{1}{bc}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}.$$

Cela prouve que I appartient à la bissectrice du triangle $\{A, B, C\}$ issue de A . De même, on montre que I appartient aux deux autres bissectrices, d'où l'assertion.

2) Vérifions que l'on a $d(I, P) = d(I, Q)$. Le point A est distinct de P, Q et I . Posons

$$u = \frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AP}\|}, \quad u' = \frac{\overrightarrow{AI}}{\|\overrightarrow{AI}\|} \quad \text{et} \quad v = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\|\overrightarrow{AQ}\|}.$$

Le vecteur u' est un vecteur directeur de la bissectrice de (u, v) . Soient α et r les rotations de \vec{E} telles que $\alpha(u) = u'$ et $r(u) = v$. On a $r = \alpha^2$ (prop. 11.4). Il en résulte que dans le groupe des angles orientés de \vec{E} on a l'égalité

$$(\widehat{u, v}) = 2(\widehat{u, u'}).$$

D'après la relation de Chasles, on obtient

$$(\widehat{u, u'}) = (\widehat{u', v}).$$

D'après le lemme 11.14, on a donc

$$(6) \quad (u|u') = (u'|v).$$

On a les égalités

$$(u|u') = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AI}}{\|\overrightarrow{AP}\| \|\overrightarrow{AI}\|}, \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{IP} = 0.$$

Par suite, on a

$$(u|u') = \frac{d(A, P)}{d(A, I)}.$$

De même, en remplaçant P par Q , on obtient

$$(u'|v) = \frac{d(A, Q)}{d(A, I)}.$$

D'après (6), on a donc $d(A, P) = d(A, Q)$. Les égalités

$$\|\overrightarrow{AP}\|^2 + \|\overrightarrow{PI}\|^2 = \|\overrightarrow{AI}\|^2 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QI}\|^2 = \|\overrightarrow{AI}\|^2,$$

impliquent alors $d(I, P) = d(I, Q)$. De même, on prouve que $d(I, Q) = d(I, R)$, d'où le résultat (prop. 11.6).

Proposition 11.11. *Soit $\{A, B, C\}$ un triangle de E . Notons \hat{A} l'écart angulaire entre \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , \hat{B} celui entre \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} , et \hat{C} celui entre \overrightarrow{CA} et \overrightarrow{CB} . On a*

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$$

Démonstration : Rappelons que \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} appartiennent à $[0, \pi]$. Ils sont distincts de 0 et π car A, B et C ne sont pas alignés. Posons par commodité

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|, \quad AC = \|\overrightarrow{AC}\| \quad \text{et} \quad BC = \|\overrightarrow{BC}\|.$$

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de \overrightarrow{E} telle que

$$e_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}.$$

Posons

$$\overrightarrow{AC} = \alpha e_1 + \beta e_2.$$

On a

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = (\alpha - AB)e_1 + \beta e_2.$$

Par définition, on a

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{\alpha}{AC}.$$

Par ailleurs, on a l'égalité

$$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1.$$

Il en résulte que l'on a

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{\beta^2}{AC^2}.$$

Puisque \hat{A} est dans $[0, \pi]$, on a $\sin \hat{A} \geq 0$. On obtient

$$\sin \hat{A} = \frac{|\beta|}{AC}.$$

De même, on a

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{AB - \alpha}{BC} \quad \text{et} \quad \sin \hat{B} = \frac{|\beta|}{BC}.$$

On en déduit les relations suivantes :

$$\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{|\beta|AB}{AC \ BC} \quad \text{et} \quad \cos(\hat{A} + \hat{B}) = -\cos \hat{C} = \cos(\pi - \hat{C}).$$

On a $\sin(\hat{A} + \hat{B}) \geq 0$ et \hat{A}, \hat{B} sont dans $]0, \pi[$. Il s'ensuit que $\hat{A} + \hat{B}$ est dans $[0, \pi]$. Puisque $\pi - \hat{C}$ l'est aussi, on obtient (formule (19) du chapitre V)

$$\text{Arccos} \cos(\hat{A} + \hat{B}) = \text{Arccos} \cos(\pi - \hat{C}),$$

d'où $\hat{A} + \hat{B} = \pi - \hat{C}$ et le résultat.

Remarque 11.11. Soient $\{A, B, C\}$ un triangle rectangle en B i.e. \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux, et \hat{A} l'écart angulaire entre \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Notons AB (resp. AC, BC) la norme de \overrightarrow{AB} (resp. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$). On a les égalités

$$(7) \quad \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}.$$

En effet, on a

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \ AC}.$$

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, d'où

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2,$$

et la première égalité. En écrivant que l'on a $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$, on obtient alors la seconde égalité de (7).

Terminons ce paragraphe en démontrant le théorème appelé de l'angle au centre. Pour tous M, N, P et Q dans E , on notera, pour des raisons typographiques, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ l'angle orienté des vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} . Rappelons qu'étant donnés un cercle \mathcal{C} de centre O , non réduit à O , et un point M de \mathcal{C} , la tangente en M à \mathcal{C} est la droite passant par M et de direction l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par \overrightarrow{OM} .

Proposition 11.12 (Angle au centre). Soient O un point de E et \mathcal{C} un cercle de centre O . Soient A, B, C trois points distincts de \mathcal{C} . On a

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

De plus, pour tout point M de la tangente en B à \mathcal{C} , on a

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}).$$

Démonstration : Soit s la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice du bipoint (A, B) i.e. la symétrie affine d'axe cette médiatrice parallèlement à toute droite qui lui est orthogonale. On a

$$s(A) = B, \quad s(B) = A \quad \text{et} \quad s(O) = O.$$

Compte tenu de l'assertion 5 de la proposition 11.5, on a donc

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}).$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}).$$

De même, on a

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}).$$

On obtient ainsi

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) - 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

d'où la première égalité.

En ce qui concerne la seconde égalité, considérons le milieu N du bipoint (B, C) . D'après la proposition 11.4, on a l'égalité

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}).$$

Par ailleurs, on a

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{BC}).$$

L'angle orienté $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB})$ est l'angle plat ω (prop. 11.6). Par ailleurs, les vecteurs \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{BM} sont orthogonaux et il en est de même de \overrightarrow{ON} et \overrightarrow{BC} (lemme 11.18). On a donc

$$2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) = 2(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{BC}) = \omega.$$

On en déduit les égalités

$$2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 4\omega + 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}),$$

d'où le résultat.

8. Isométries affines

Définition 11.23. On appelle *isométrie (affine) de E* toute application f de E dans E qui conserve la distance, autrement dit, qui vérifie la condition

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \quad \text{pour tous } P, Q \in E.$$

Une telle application est affine, ce qui n'est nullement évident a priori. Démontrons que tel est bien le cas.

Théorème 11.2. *Toute isométrie de E est une application affine.*

Démonstration : Soit f une isométrie de E . Soit A un point de E fixé. Pour tout $x \in \vec{E}$ il existe un unique point M tel que $x = \overrightarrow{AM}$. Considérons l'application $u : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ définie par

$$u(x) = \overrightarrow{f(A)f(M)} \quad \text{où } x = \overrightarrow{AM}.$$

Soient M et N des points de E . On a les égalités

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(A)f(N)} - \overrightarrow{f(A)f(M)} = u(\overrightarrow{AN}) - u(\overrightarrow{AM}).$$

Tout revient ainsi à démontrer que u est un endomorphisme de \vec{E} . Cela prouvera que f est affine et que u est son application linéaire associée. Soient x et y des vecteurs de \vec{E} . Puisque f conserve la distance, on a l'égalité

$$(8) \quad \|u(x) - u(y)\| = \|y - x\|.$$

En particulier, u conserve la norme. Vérifions que u conserve le produit scalaire. On écrit pour cela que l'on a

$$\|u(x) - u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - 2(u(x)|u(y)) \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y).$$

D'après (8), on obtient $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Par suite, on a

$$\|u(x + y) - u(x) - u(y)\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x|y)) = 0,$$

d'où $u(x + y) = u(x) + u(y)$. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\|u(\lambda x) - \lambda u(x)\|^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

Ainsi u est linéaire, d'où le résultat

Corollaire 11.3. Soit $f : E \rightarrow E$ une application. Pour que f soit une isométrie il faut et il suffit que f soit affine et que son application linéaire associée soit une isométrie de \vec{E} .

Démonstration : Supposons que f soit une isométrie. On vient de voir que f est affine. Par ailleurs, \vec{f} étant son application linéaire associée, pour tous P et Q dans E , on a

$$(9) \quad d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{PQ})\| \quad \text{et} \quad d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

On a donc $\|\vec{f}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$. Pour tout $u \in \vec{E}$, il existe P et Q dans E tels que $u = \overrightarrow{PQ}$, ainsi \vec{f} est dans $O(\vec{E})$. L'implication réciproque résulte des formules (9).

Exemples 11.2.

1) Les translations sont des isométries affines car leur application linéaire associée est l'identité de \vec{E} (cor. 11.3).

2) Les symétries orthogonales d'axe une droite sont des isométries. Rappelons leur définition.

Définition 11.24 (Symétrie orthogonale d'axe une droite). Soit D une droite affine de E . On appelle symétrie orthogonale d'axe D , la symétrie d'axe D parallèlement à toute droite orthogonale à D .

Lemme 11.19. Soient D une droite affine de E et S_D la symétrie orthogonale d'axe D . Alors \vec{S}_D est la symétrie orthogonale d'axe \vec{D} . En particulier, S_D est une isométrie de E .

Démonstration : Par définition, \vec{S}_D est l'identité sur \vec{D} et moins l'identité sur \vec{D}^\perp , d'où l'assertion (déf. 11.7).

Lemme 11.20. Soit f une isométrie de E . Alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite si et seulement si l'ensemble de ses points fixes est une droite de E .

Démonstration : Si f est une symétrie orthogonale d'axe une droite, le fait que cette droite soit l'ensemble de ses points fixes résulte du lemme 10.19. Inversement, supposons que l'ensemble des points fixes de f soit une droite D de E . Dans ce cas, vu que \vec{f} est dans $O(\vec{E})$, on en déduit que \vec{f} est la symétrie orthogonale d'axe \vec{D} . Ainsi f est l'identité sur D et \vec{f} est moins l'identité sur \vec{D}^\perp , donc f est la symétrie orthogonale d'axe D .

3) Un autre exemple typique d'isométries est celui des symétries glissées.

Définition 11.25 (Symétrie glissée). Soient D une droite de E et u un vecteur non nul de \vec{D} . On appelle symétrie glissée d'axe D et de vecteur translation u , l'application $S_D \circ t_u$, où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D et t_u la translation de vecteur u .

Lemme 11.21. Soient D une droite de E et u un vecteur non nul de \vec{D} . La symétrie glissée $S_D \circ t_u$ est une isométrie et l'on a $S_D \circ t_u = t_u \circ S_D$.

Démonstration : Soit $S_{\vec{D}}$ la symétrie orthogonale d'axe \vec{D} . On a $S_{\vec{D}} = \overrightarrow{S_D}$ (lemme 11.19), d'où $\overrightarrow{S_D \circ t_u} = S_{\vec{D}} \in O(\vec{E})$, donc $S_D \circ t_u$ est une isométrie. Par ailleurs, les applications linéaire associées à $S_D \circ t_u$ et $t_u \circ S_D$ sont les mêmes. Afin de prouver la commutativité annoncée, il suffit donc de vérifier que ces applications coïncident en un point. Soit A un point de D . On a les égalités

$$t_u \circ S_D(A) = A + u = B \quad \text{où} \quad \overrightarrow{AB} = u,$$

$$S_D \circ t_u(A) = S_D(A + u) = S_D(B).$$

Parce que u appartient à \vec{D} et que A est sur D , le point B est aussi sur D , d'où $S_D(B) = B$ et l'assertion.

4) D'autres exemples d'isométries sont données par les rotations de E .

Définition 11.26 (Rotation affine). Une rotation est une application affine de E ayant au moins un point fixe, dont l'application linéaire associée est une rotation de \vec{E} .

Comme conséquence directe du corollaire 11.3 :

Lemme 11.22. Une rotation de E est une isométrie.

Lemme 11.23. Soit f une isométrie de E distincte de l'identité. Alors f est une rotation si et seulement si f possède un unique point fixe.

Démonstration : Supposons que f soit une rotation de E autre que l'identité. Étant donnée une base orthonormée \mathcal{B} de \vec{E} , il existe des réels a et b tels que la matrice de \vec{f} dans \mathcal{B} soit

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, son polynôme caractéristique est $X^2 - 2aX + 1$. Puisque f n'est pas l'identité, et possède au moins un point fixe, f n'est pas une translation. Par suite, \vec{f} n'est pas l'identité de \vec{E} . Il en résulte que 1 n'est pas valeur propre de \vec{f} , donc f possède un unique point fixe (cor. 10.3). Inversement, supposons que f ait un unique point fixe A . Parce que f est une isométrie, \vec{f} est dans $O(\vec{E})$ (cor. 11.3). Si \vec{f} n'était pas dans $O^+(\vec{E})$, les points de la droite affine passant par A et de direction le noyau de $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$ seraient fixes par f , d'où une contradiction et le résultat.

Définition 11.27. Supposons \vec{E} orienté. Soient A un point de E et t un nombre réel. La rotation de centre A et d'angle de mesure $t + 2\pi\mathbb{Z}$, ou par abus d'angle t , est la rotation

qui fixe A , dont l'application linéaire associée est représentée dans toute base orthonormée directe de \vec{E} par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Soit r la rotation de centre A et d'angle t . Si t appartient à $2\pi\mathbb{Z}$, r est l'application identité de E (et tout point de E est centre de r). Si t n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$, le point A est l'unique point fixe de r (lemme 11.23).

Définition 11.28. La rotation de centre A et d'angle de mesure $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle la symétrie point de centre A , ou la symétrie par rapport au point A .

Lemme 11.24. Soient P et Q deux points de E et S_P, S_Q les symétries respectivement par rapport à P et Q . Alors $S_P \circ S_Q$ est la translation de vecteur $2\vec{QP}$.

Démonstration : L'application linéaire associée à $S_P \circ S_Q$ est l'identité, par suite $S_P \circ S_Q$ est une translation. Posons $R = S_P(Q)$. On a

$$S_P \circ S_Q(Q) = S_P(R) = Q.$$

Ainsi, le vecteur de la translation $S_P \circ S_Q$ est \vec{QR} . Par ailleurs, on a $S_P(P) = P$, d'où

$$\vec{S_P}(\vec{PQ}) = \vec{PR} = -\vec{PQ}.$$

On obtient

$$\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR} = 2\vec{QP}.$$

Définition 11.29. On dit qu'une isométrie de E est un déplacement si son application linéaire associée est dans $O^+(\vec{E})$. Sinon, on dit que c'est un antidéplacement.

Lemme 11.25. 1) L'ensemble des isométries de E est un sous-groupe du groupe des automorphismes E .

2) L'ensemble des déplacements est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries de E .

Démonstration : L'application linéaire associée à une isométrie est une bijection, par suite, une isométrie est un automorphisme de E . L'identité est une isométrie, la composée de deux isométries est une isométrie (par définition) et l'inverse d'une isométrie f en est une aussi, car $\vec{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ est dans $O(\vec{E})$ (cor. 11.3), d'où la première assertion. Par ailleurs, si G est le groupe des isométries de E , l'application de G à valeurs dans $\{\pm 1\}$, qui à une isométrie associe le déterminant de son application linéaire associée, est un morphisme

surjectif de groupes, dont le noyau est par définition l'ensemble des déplacements de E , d'où le résultat.

Les translations et les rotations sont des déplacements. Les symétries orthogonales d'axe une droite, éventuellement glissées, sont des antidéplacements. Nous allons voir dans ce qui suit que ces exemples constituent la description exhaustive des isométries de E .

9. Classification des isométries affines

Commençons par établir le théorème de décomposition canonique d'une isométrie.

Théorème 11.3. *Soit f une isométrie de E . Il existe une unique décomposition de f sous la forme $f = \tau \circ f_0$ où τ est une translation, et où f_0 est une isométrie de E ayant au moins un point fixe et qui commute avec τ .*

Démonstration : Il s'agit de prouver qu'il existe un unique vecteur $u \in \vec{E}$ tel que, t_u étant la translation de vecteur u et t_{-u} celle de vecteur $-u$, les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- 1) t_u commute avec $t_{-u} \circ f$.
- 2) l'application $t_{-u} \circ f$ a au moins un point fixe.

En effet, s'il existe un tel vecteur u , en posant $f_0 = t_{-u} \circ f$ on obtient une décomposition de f sous la forme annoncée. Quant à l'unicité d'une telle décomposition, elle provient alors du caractère d'unicité de u .

Soit A un point fixé de E . Vérifions que les conditions 1 et 2 sont respectivement équivalentes aux deux suivantes :

- 3) on a $\vec{f}(u) = u$.
- 4) Le vecteur $\overrightarrow{Af(A)} - u$ appartient à l'image de $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$.

La condition 1 signifie que l'on a $t_u \circ f = f \circ t_u$. Puisque l'on a $f \circ t_u = t_{\vec{f}(u)} \circ f$, la condition 1 signifie donc que $t_u \circ f = t_{\vec{f}(u)} \circ f$ i.e. $t_u = t_{\vec{f}(u)}$, ce qui se traduit par la condition 3. Le fait que la seconde condition soit équivalente à la quatrième résulte de la proposition 10.3 et des égalités

$$\overrightarrow{A(t_{-u}f)(A)} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)B} = \overrightarrow{Af(A)} - u \quad \text{avec} \quad B = (t_{-u}f)(A).$$

Par ailleurs, on a l'égalité (lemme 11.3)

$$\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}) = \vec{E}.$$

Il existe donc un unique vecteur $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$ tel que $\overrightarrow{Af(A)} - u$ soit dans l'image de $\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}$. Ainsi u est l'unique vecteur de \vec{E} satisfaisant les conditions 3 et 4, d'où le résultat.

Définition 11.30. Avec les notations précédentes, l'égalité $f = \tau \circ f_0$ s'appelle la décomposition canonique de f . On dit que τ est la composante translation de f et que f_0 est sa composante à point fixe. L'ensemble des points fixes de f_0 s'appelle l'axe de f .

Remarques 11.11.

Soit f une isométrie de E .

1) L'axe de f est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$. Puisque E est un plan, c'est donc un point, une droite ou E .

2) Le vecteur u de la composante translation de f appartient à la direction de l'axe de f vu que l'on a $\vec{f}(u) = u$ (condition 3 de la démonstration du théorème).

3) L'isométrie f est entièrement déterminée par son axe, sa composante translation et son application linéaire associée. En effet, si A est un point de l'axe de f , alors $f(A)$ est connu car $f(A) = A + u$ où u est le vecteur translation de f .

On en déduit la classification des isométries du plan E .

Théorème 11.4. L'ensemble des isométries de E est formé des translations, des rotations, des symétries droites et des symétries glissées.

Démonstration : Soit f une isométrie de E . Soient τ sa composante translation et f_0 sa composante à point fixe.

Si l'axe de f est E tout entier, f_0 est l'identité de E et $f = \tau$ est une translation.

Supposons que l'axe de f soit un point. Dans ce cas, $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$ est nul, et d'après la remarque ci-dessus, le vecteur translation de τ est nul i.e τ est l'identité de E . Par suite, on a $f = f_0$ et f a un unique point fixe. C'est donc une rotation (lemme 11.23).

Supposons que l'axe de f soit une droite. L'isométrie f_0 est donc une symétrie droite (lemme 11.20). Si τ est l'identité, on a $f = f_0$ et f est une symétrie droite. Sinon, f est par définition une symétrie glissée. Cela établit le résultat.

10. Groupe d'isométries d'un polygone régulier

Supposons \vec{E} orienté. Soient O un point de E , n un entier ≥ 2 , et r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{n} + 2\pi\mathbb{Z}$. Soit A un point distinct de O . Posons

$$X = \left\{ r^k(A) \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Le cardinal de X est n . En effet, r^k est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\mathbb{Z}$. Les points O et A étant distincts, on a $r^k(A) \neq A$ si $1 \leq k \leq n-1$ (lemme 11.23), ce qui implique l'assertion. Les points de X appartiennent au cercle de centre O et de rayon $d(O, A)$. On dit parfois que X est un polygone régulier à n côtés.

On va décrire l'ensemble $\text{Isom}(X)$ des isométries f de E telles que $f(X) = X$. C'est un sous-groupe du groupe des isométries de E .

Lemme 11.26. *Soit G le centre de gravité des points de X . Pour tout $f \in \text{Isom}(X)$ on a $f(G) = G$.*

Démonstration : Puisque f conserve X , le point $f(G)$ est aussi le centre de gravité des points de X (prop. 10.7), d'où l'assertion.

Soient D la droite passant par O et A et s la symétrie orthogonale d'axe D . Compte tenu du lemme 11.11, on a

$$srs(O) = O = r^{-1}(O) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{sr\vec{s}} = \overrightarrow{r^{-1}\vec{1}}.$$

Par suite, on a $srs = r^{-1}$. Vu que $s^2 = \text{Id}_E$, on obtient les égalités

$$(10) \quad sr^k s = r^{-k} \quad \text{pour tout} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Notons $\text{Isom}^+(X)$ le sous-groupe de $\text{Isom}(X)$ formé des déplacements et $\text{Isom}^-(X)$ le sous-ensemble de $\text{Isom}(X)$ formé des antidéplacements (ce n'est pas un groupe).

Théorème 11.5. *Le groupe $\text{Isom}(X)$ est d'ordre $2n$. Son sous-groupe $\text{Isom}^+(X)$ est cyclique d'ordre n engendré par r , autrement dit, on a*

$$\text{Isom}^+(X) = \{r^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Son sous-ensemble des antidéplacements est

$$\text{Isom}^-(X) = \{r^k s \mid 0 \leq k \leq n-1\}.$$

De plus, $\text{Isom}(X)$ n'est pas abélien si $n \geq 3$.

Démonstration : Décrivons d'abord $\text{Isom}^+(X)$. Puisque l'on a $r^n = \text{Id}_E$, r est dans $\text{Isom}^+(X)$. Le sous-groupe du groupe des isométries de E engendré par r , qui est cyclique d'ordre n , est donc contenu dans $\text{Isom}^+(X)$. Il suffit alors de prouver que l'on a

$$(11) \quad |\text{Isom}^+(X)| \leq n.$$

Remarquons d'abord que r possède un unique point fixe (lemme 11.23). Les points O et G étant fixes par r (lemme 11.26), on a ainsi

$$(12) \quad G = O.$$

Soit f un élément $\text{Isom}^+(X)$. C'est une rotation ou une translation (th. 11.4). Puisque f a au moins un point fixe (*loc. cit.*), c'est une rotation. D'après (12), f est donc une rotation de centre O . Par ailleurs, pour tout $k = 0, \dots, n-1$, il existe une unique rotation de \vec{E} qui envoie le vecteur \vec{OA} sur $\vec{Or^k(A)}$ (lemme 11.5). Il en résulte que f est entièrement déterminée par $f(A)$. On obtient alors (11) vu que $f(A)$ appartient à X , et que l'on a $|X| = n$. On a ainsi démontré que $\text{Isom}^+(X)$ est cyclique d'ordre n engendré par r .

Déterminons $\text{Isom}^-(X)$. Soit P un point de X . Il existe k entre 0 et $n-1$ tel que $P = r^k(A)$. Compte tenu de (10) et de l'égalité $s(A) = A$, on a

$$s(P) = sr^k s(A) = r^{-k}(A).$$

Ainsi $s(P)$ est dans X , donc s appartient à $\text{Isom}^-(X)$, et il en est de même des éléments $r^k s$. Par ailleurs, si g est dans $\text{Isom}^-(X)$, alors gs est dans $\text{Isom}^+(X)$. Il existe donc $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $gs = r^k$ i.e. $g = r^k s$, d'où l'égalité annoncée.

Pour tous k et k' distincts entre 0 et $n-1$, on a $r^k s \neq r^{k'} s$. Par suite, on a $|\text{Isom}^-(X)| = n$. Le groupe $\text{Isom}(X)$ étant la réunion disjointe de $\text{Isom}^+(X)$ et $\text{Isom}^-(X)$, il est donc d'ordre $2n$. L'égalité $srs = r^{-1}$ implique qu'il n'est pas abélien dès que l'on a $n \geq 3$, d'où le résultat.

Remarques 11.12.

1) Le groupe $\text{Isom}(X)$ est engendré par les éléments r et s vérifiant les relations $r^n = \text{Id}_E$ et $srs = r^{-1}$. On l'appelle le groupe diédral d'ordre $2n$.

2) Si $n = 2$, $\text{Isom}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $n = 3$, il est isomorphe au groupe des bijections de $\{1, 2, 3\}$.