

Chapitre II - Suites numériques

Soit E un ensemble. Nous adopterons comme définition qu'une suite d'éléments de E est une application de \mathbb{N} à valeurs dans E . Ce n'est pas la définition la plus générale d'une suite, mais elle suffira à tous nos besoins. Elle requiert néanmoins une précision. Il arrive fréquemment en pratique que l'on dispose d'une application définie seulement sur \mathbb{N} privé d'un nombre fini de points. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ l'application qui à n associe $\frac{1}{n}$ est définie sur $\mathbb{N} - \{0\}$ et pas sur \mathbb{N} . On parlera néanmoins de la suite de terme général $\frac{1}{n}$ sans lui attribuer explicitement une valeur en 0. Pour toutes les questions de convergence, ce qui sera notre préoccupation, cela n'a pas importance, vu que seul compte le comportement de l'application pour les entiers assez grands.

Ce chapitre est consacré à l'étude des suites de nombres réels et complexes. Puisque \mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C} , toute suite de nombres réels est aussi une suite de nombres complexes. Nous dirons qu'une suite de nombres réels est une suite réelle, et qu'une suite de nombres complexes est une suite complexe. Comme on va le constater, de nombreux énoncés valent aussi bien pour les suites réelles que pour les suites complexes générales, sans modifier un quelconque argument dans les démonstrations. Cela étant, il y a une différence majeure dans la théorie entre les suites réelles et complexes, car \mathbb{R} est un corps ordonné et, comme nous le verrons, \mathbb{C} n'en est pas un. Tous les énoncés relatifs aux suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre sur \mathbb{R} , autrement dit reposant sur la structure du corps ordonné \mathbb{R} , n'ont donc aucun sens pour les suites complexes générales.

Pour toute suite $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, on notera comme il est d'usage u_n l'image de n dans \mathbb{C} . On désignera la suite u par (u_n) . L'ensemble des valeurs de (u_n) est par définition $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et u_n est le terme général de la suite (u_n) .

Table des matières

1. Suites convergentes	2
2. Opérations algébriques	4
3. Suites de nombres réels	9
Suites monotones - Limites infinies - Encadrements - Applications	
4. Suites extraites - Valeurs d'adhérence	17
5. Théorème de Bolzano -Weierstrass	20
6. Suites de Cauchy	23

1. Suites convergentes

Définition 2.1. Soit (u_n) une suite complexe. On dit que (u_n) est convergente s'il existe un élément $\ell \in \mathbb{C}$ tel que la condition suivante soit satisfaite : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$(1) \quad |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Si tel est le cas, on dit plus précisément que (u_n) converge vers ℓ . La suite (u_n) est dite divergente si cette condition n'est pas satisfaite.

Lemme 2.1. Soit (u_n) une suite complexe. Il existe au plus un élément $\ell \in \mathbb{C}$ tel que (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration : Soient ℓ et ℓ' des nombres complexes tels que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' . Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \quad \text{et} \quad |u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

Pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$, on a donc

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon,$$

d'où $\ell = \ell'$.

Si une suite complexe (u_n) converge vers ℓ , on dit que ℓ est la limite de (u_n) , ou que (u_n) est convergente de limite ℓ , et on notera

$$\ell = \lim u_n.$$

Corollaire 2.1. Soit (u_n) une suite réelle convergente de limite un nombre complexe ℓ . Alors ℓ est un nombre réel.

Démonstration : Posons $\ell = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier n_0 tel que l'on ait $|u_n - (a + ib)| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. Pour un tel entier n , on a donc les inégalités

$$|u_n - a| = \sqrt{(u_n - a)^2} \leq \sqrt{(u_n - a)^2 + b^2} = |u_n - (a + ib)| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que (u_n) converge vers a . D'après l'unicité de la limite, on a donc $\ell = a \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.2. Une suite réelle (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Remarque 2.1. La nature d'une suite, i.e. le fait qu'elle soit convergente ou divergente, ne change pas si l'on modifie un nombre fini de ses termes.

Exemples 2.1.

1) La suite constante définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a$ est convergente de limite a .

2) La suite $(\frac{1}{n})$ est convergente de limite 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\varepsilon > 1$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pour tout entier $p \geq 1$, l'inégalité $n^p \geq n$ entraîne alors que la suite $(\frac{1}{n^p})$ est convergente de limite nulle.

3) La suite $(\frac{n}{n+1})$ est convergente de limite 1. Cela résulte de l'égalité

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

et du fait que la suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0 d'après l'exemple précédent.

4) La suite de terme général $(-1)^n$ est divergente car ses termes d'indices pairs valent 1 et ceux d'indices impairs valent -1 .

5) Soit z un nombre complexe. La suite (z^n) est convergente si et seulement si $|z| < 1$ ou bien $z = 1$. De plus, on a

$$(2) \quad \lim z^n = 0 \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

En effet, supposons $|z| < 1$. En remplaçant z par $|z|$, et compte tenu du fait que $|z|^n = |z^n|$, on se ramène au cas où z est un nombre réel positif. Afin de prouver (2), on peut donc supposer $0 \leq z < 1$. Posons $1 = z + t$ avec $t > 0$. D'après la formule du binôme, on a

$$1 = (z + t)^{n+1} = z^{n+1} + (n+1)z^n t + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k z^k t^{n+1-k}.$$

Les termes du second membre étant positifs, on a en particulier

$$(n+1)z^n t < 1 \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq z^n < \frac{1}{t(n+1)}.$$

La suite $(\frac{1}{t(n+1)})$ étant convergente de limite nulle, cela entraîne (2).

Supposons $|z| \geq 1$ et la suite (z^n) convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$. La suite (z^{n+1}) est aussi convergente de limite ℓ . On a $z^{n+1} = z z^n$ de sorte que la suite (z^{n+1}) est convergente de limite $z\ell$, d'où $z\ell = \ell$ i.e. $\ell(z-1) = 0$. On a $\ell \neq 0$, car vu que $|z| \geq 1$, on a $|z|^n \geq 1$ pour

tout $n \in \mathbb{N}$ et l'on ne peut avoir $|z^n| < 1$ pour n assez grand. On obtient donc $z = 1$ et dans ce cas la suite (z^n) est constante égale à 1.

6) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(3) \quad \lim \frac{z^n}{n!} = 0.$$

On peut supposer z réel et $z > 0$ (car $|z|^n = |z^n|$). Posons $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Quels que soient les entiers naturels n et p avec $n > p$, on a

$$u_n = \frac{z^p z^{n-p}}{p!(p+1) \cdots n} = u_p \frac{z}{p+1} \cdots \frac{z}{n}.$$

Prenons pour p la partie entière de $10z$. On a $p \leq 10z < p+1$. Pour tout $q \geq p+1$, on a donc $\frac{z}{q} < \frac{1}{10}$. Il en résulte que l'on a pour tout $n > p$

$$0 < u_n \leq \frac{u_p}{10^{n-p}} = \frac{10^p u_p}{10^n}.$$

Cela implique (3) car la suite $(\frac{1}{10^n})$ converge vers 0.

Définition 2.2. Soit (u_n) une suite complexe. On dit qu'elle est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| < M$.

Lemme 2.2. Toute suite complexe convergente est bornée.

Démonstration : Soit (u_n) une suite complexe convergente de limite ℓ . Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| < 1$. On a donc pour tout $n \geq n_0$ l'inégalité $|u_n| < |\ell| + 1$. En posant $M = \max(|\ell| + 1, |u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|)$, on obtient $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Opérations algébriques

Soient (u_n) et (v_n) des suites complexes. On appelle somme de (u_n) et (v_n) , et on note $(u_n) + (v_n)$, la suite de terme général $u_n + v_n$. De même, le produit des suites (u_n) et (v_n) , noté $(u_n)(v_n)$, est la suite de terme général $u_n v_n$. Si λ est un nombre complexe, la suite $\lambda(u_n)$ est la suite (λu_n) de terme général λu_n . L'ensemble des suites complexes est ainsi muni d'une structure d'anneau commutatif et l'ensemble des suites réelles en est un sous-anneau. L'élément neutre additif est la suite constante égale à 0 et l'opposé de (u_n) est la suite $(-u_n)$. L'élément neutre multiplicatif est la suite constante égale à 1.

Voyons le comportement des suites convergentes vis-à-vis de ces opérations.

Proposition 2.1. Soient (u_n) et (v_n) des suites complexes convergentes. Posons

$$\ell = \lim u_n \quad \text{et} \quad \ell' = \lim v_n.$$

- 1) La suite $(u_n) + (v_n)$ est convergente de limite $\ell + \ell'$.
- 2) La suite $(u_n)(v_n)$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
- 3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite (λu_n) est convergente de limite $\lambda\ell$.
- 4) La suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.
- 5) Si $\ell \neq 0$, alors on a $u_n \neq 0$ pour tout n assez grand, et la suite $(\frac{1}{u_n})$ est convergente de limite $\frac{1}{\ell}$.

Démonstration : Soit ε un nombre réel strictement positif.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Si n est assez grand, $|u_n - \ell|$ et $|v_n - \ell'|$ sont strictement plus petits que $\frac{\varepsilon}{2}$, d'où l'inégalité $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| < \varepsilon$ et l'assertion.

- 2) On a

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n v_n - u_n \ell'| + |u_n \ell' - \ell\ell'| = |u_n| |v_n - \ell'| + |\ell'| |u_n - \ell|.$$

La suite (u_n) étant convergente, elle est bornée, autrement dit, il existe $M > 0$ tel que l'on ait $|u_n| < M$. Posons

$$N = \text{Max}(M, |\ell'|).$$

On a $N > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2N}$. De même, il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$, on obtient $|u_n v_n - \ell\ell'| < \varepsilon$, d'où l'assertion.

- 3) On peut supposer $\lambda \neq 0$. Pour n assez grand on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, d'où $|\lambda u_n - \lambda\ell| < \varepsilon$.

- 4) On a

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|,$$

d'où pour n assez grand $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$.

- 5) Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n| > \frac{|\ell|}{2},$$

et en particulier u_n est non nul. Pour tout $n \geq n_0$ on obtient ainsi

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n \ell|} < \frac{2|u_n - \ell|}{|\ell|^2}.$$

Par ailleurs, il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon |\ell|^2}{2}.$$

Pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, n_1)$ on en déduit l'inégalité $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| < \varepsilon$, d'où le résultat.

L'énoncé suivant permet parfois de déterminer, comme pour les opérations algébriques, la nature d'une suite de façon simple.

Lemme 2.3. Soient X une partie de \mathbb{R} et $u \in \mathbb{R}$ un point adhérent à X . Soit f une fonction définie sur X à valeurs dans \mathbb{C} admettant une limite v au point u . Soit (u_n) une suite d'éléments de X convergente de limite u . Alors, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite v .

Démonstration : Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait l'implication

$$|x - u| < \alpha \implies |f(x) - v| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - u| < \alpha$. Pour tout $n \geq n_0$, on a donc $|f(u_n) - v| < \varepsilon$, d'où l'assertion.

Corollaire 2.3. Soient X une partie de \mathbb{R} et f une fonction définie sur X à valeurs dans \mathbb{C} . Soient a un point de X en lequel f soit continue et (u_n) une suite d'éléments de X convergente de limite a . Alors, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite $f(a)$.

Exemples 2.2.

1) On a

$$\lim \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 1,$$

comme on le constate en écrivant que pour $n \geq 1$, on a $\frac{n^2+1}{n^2+n+1} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ et en utilisant la proposition.

2) Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout $n \geq 1$, notons $\sqrt[n]{a}$ la racine n -ième positive de a (prop. 1.5). La suite $(\sqrt[n]{a})$ est convergente et l'on a

$$(4) \quad \lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

En effet, supposons $a > 1$. Posons $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ avec $a_n > 0$. On a

$$a = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \sum_{k=2}^n C_n^k a_n^k.$$

Puisque tous les termes de la somme sont positifs, on obtient

$$0 < a_n \leq \frac{a-1}{n},$$

donc la suite (a_n) tend vers 0, d'où le résultat dans ce cas. Le cas où $a = 1$ est immédiat. Si l'on a $0 < a < 1$, en posant $b = \frac{1}{a}$, on a $b > 1$ et l'égalité (cor. 1.2)

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}},$$

entraîne alors (4).

3) Vérifions que les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont divergentes (l'existence des fonctions trigonométriques cosinus et sinus sera prouvée au chapitre IV). Supposons la suite $(\sin n)$ convergente de limite a . Soit n un entier naturel. Vu que $\sin 1 \neq 0$, on déduit de l'égalité

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

que la suite $(\cos n)$ est convergente de limite

$$b = \frac{a(1 - \cos 1)}{\sin 1}.$$

D'après l'égalité $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$, on a par passage à la limite,

$$-a = \frac{b(1 - \cos 1)}{\sin 1}.$$

On a $ab \neq 0$, car par exemple $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ et d'après les égalités précédentes a est nul si et seulement si b l'est aussi. On en déduit $\frac{b}{a} = -\frac{a}{b}$, puis $a^2 + b^2 = 0$ et une contradiction, donc $(\sin n)$ est divergente. En utilisant le même argument, on constate qu'il en est ainsi de la suite $(\cos n)$.

4) Soit (u_n) une suite réelle convergente de limite nulle, telle que $u_n \neq 0$ pour tout n . Alors, la suite $(\frac{\sin u_n}{u_n})$ est convergente, et l'on a

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin u_n}{u_n} = 1.$$

En effet, soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à x associe $\frac{\sin x}{x}$. Comme on le verra plus loin, f admet une limite en 0, qui vaut 1. Le lemme 2.3, appliqué avec f , $X = \mathbb{R}^*$, $u = 0$ et $v = 1$ entraîne alors la relation (5).

Établissons en application de (5) le résultat suivant. Soient a un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$ (on précisera la définition du nombre π au chapitre IV) et (u_n) la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=0}^n \cos \frac{a}{2^k}.$$

Alors, la suite (u_n) est convergente, et l'on a

$$(6) \quad \lim u_n = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

En effet, on vérifie par récurrence, en utilisant la formule $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, que l'on a pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n}}.$$

En écrivant que l'on a

$$u_n = \frac{\sin 2a}{2a} \left(\frac{a}{2^n} \right) \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}},$$

et en utilisant (5) ainsi que la proposition 2.1, on en déduit la formule (6).

En posant $x_k = \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$, en utilisant la formule $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ($x \in \mathbb{R}$), on vérifie que l'on a

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Avec $a = \frac{\pi}{4}$, on a $x_k = \cos \frac{a}{2^k}$, et l'on obtient la formule de Viète (démontrée en 1593)

$$\lim \prod_{k=0}^n x_k = \frac{2}{\pi}.$$

On dit que le produit infini des x_k est convergent de limite $\frac{2}{\pi}$ et l'on écrit

$$\prod_{k \geq 0} \cos \left(\frac{\pi}{2^{k+2}} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

Il semble que ce soit le premier produit infini apparu dans l'histoire des mathématiques.

Voici une façon parfois utile de ramener l'étude des suites complexes à celle des suites réelles :

Lemme 2.4. *Soit (u_n) une suite complexe. Posons $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Alors (u_n) est convergente si et seulement si les suites (x_n) et (y_n) le sont. Dans ce cas, on a*

$$\lim u_n = \lim x_n + i \lim y_n.$$

Démonstration : Si (x_n) (resp. (y_n)) converge vers $x \in \mathbb{R}$ (resp. $y \in \mathbb{R}$), alors (u_n) converge vers $x + iy$ (prop. 2.1). Inversement, supposons que (u_n) converge vers $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout n , on a $|u_n - (x + iy)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$, par suite, $|x_n - x|$

et $|y_n - y|$ sont plus petits que $|u_n - (x + iy)|$, ce qui entraîne la convergence de (x_n) vers x et celle de (y_n) vers y .

On évitera néanmoins d'utiliser cet énoncé pour démontrer par exemple que la suite (z^n) est convergente de limite nulle si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$. Cela étant, à titre indicatif, il résulte directement de la formule (4) et de ce lemme (ou de la prop. 2.1) que l'on a

$$\lim \frac{1}{n} + \frac{i}{\sqrt[n]{2}} = i.$$

3. Suites de nombres réels

Ce paragraphe, faisant intervenir la structure du corps ordonné \mathbb{R} , ne concerne que les suites réelles.

Définition 2.3. Soit (u_n) une suite réelle. On dit qu'elle est majorée (resp. minorée) si l'ensemble de ses valeurs est majoré (resp. minoré).

Remarque 2.2. Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

1. Suites monotones

Définition 2.4. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est croissante (resp. décroissante) si pour tout n on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$). Elle est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 2.1. Soit (u_n) une suite réelle monotone.

- 1) Supposons (u_n) croissante. Pour qu'elle soit convergente il faut et il suffit qu'elle soit majorée. Sa limite est alors la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs.
- 2) Supposons (u_n) décroissante. Pour qu'elle soit convergente il faut et il suffit qu'elle soit minorée. Sa limite est alors la borne inférieure de l'ensemble de ses valeurs.

Démonstration : Notons A l'ensemble des valeurs de (u_n) .

1) Si (u_n) est convergente elle est bornée (lemme 2.2) donc est majorée (indépendamment du fait qu'elle soit croissante). Inversement, supposons (u_n) majorée. Dans ce cas, A est non vide majoré, donc possède une borne supérieure M . Soit ε un nombre réel strictement positif. Puisque M majore A et que $M - \varepsilon$ ne le majore pas, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$M - \varepsilon < u_{n_0} \leq M.$$

La suite (u_n) étant croissante, pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0}$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$ on a les inégalités

$$M - \varepsilon < u_n < M + \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad |u_n - M| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que (u_n) est convergente de limite M .

2) La démonstration est analogue. Si (u_n) convergente, elle est bornée donc minorée. Inversement, si (u_n) est minorée, A est non vide minoré donc possède une borne inférieure N . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $N \leq u_{n_0} < N + \varepsilon$. Puisque (u_n) est décroissante, pour tout $n \geq n_0$ on a $N \leq u_n < N + \varepsilon$, et (u_n) est donc convergente de limite N .

Corollaire 2.4. *Une suite réelle monotone est convergente si et seulement si elle est bornée.*

Démonstration : Une suite convergente de nombres réels est bornée. La réciproque résulte directement du théorème 2.1.

Exemples 2.3.

1) Considérons un nombre réel $a > 0$. Soient x_0 un nombre réel positif tel que $x_0^2 > a$ et (x_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par l'égalité

$$(7) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Démontrons que (x_n) est convergente de limite \sqrt{a} , la racine carrée positive de a . Tout d'abord, cette suite est bien définie car x_0 étant strictement positif, il en est de même de x_n pour tout n . Vérifions que l'on a

$$(8) \quad x_n^2 > a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse, on a $x_0^2 > a$. Soit n un entier naturel tel que $x_n^2 > a$. On a

$$(9) \quad x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0,$$

d'où l'on déduit que l'on a

$$x_n^2 - x_{n+1}^2 < 2x_n(x_n - x_{n+1}) = x_n^2 - a,$$

d'où $x_{n+1}^2 > a$ et la condition (8). Il résulte de (9) que la suite (x_n) est décroissante. Puisque qu'elle est minorée par \sqrt{a} , elle est donc convergente (th. 2.1). Si ℓ est la limite de (x_n) on a donc $\ell \geq \sqrt{a}$. Compte tenu de (7) on a l'égalité $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$, d'où $\ell^2 = a$ puis $\ell = \sqrt{a}$ et l'assertion.

Cette suite converge rapidement vers sa limite. En effet, en utilisant (7) et (8) on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} < \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$(10) \quad x_{n+1} - \sqrt{a} < 2\sqrt{a} \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n+1}}.$$

Par exemple avec $a = 3$ et $x_0 = 2$, vu que $5 < 3\sqrt{3}$ (car $25 < 27$), on vérifie que l'on a

$$\frac{x_0 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}.$$

Avec $n = 2$ dans (10), on obtient

$$0 < x_3 - \sqrt{3} < \frac{4}{10^8} \quad \text{i.e.} \quad x_3 - \frac{4}{10^8} < \sqrt{3} < x_3.$$

Il en résulte que 1,732050 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-6} près par défaut.

2) Soient a un nombre réel positif et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Prouvons que (u_n) est convergente et que l'on a

$$\lim u_n = \sqrt{a^2 + 2}.$$

Tout d'abord (u_n) est croissante. On vérifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(11) \quad u_n = \sqrt{a^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}},$$

d'où il résulte que (u_n) est majorée par $\sqrt{a^2 + 2}$. Par suite, (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. D'après (11), on a

$$u_n^2 = a^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k},$$

d'où l'on déduit que $\lim u_n^2 = a^2 + 2$. Puisque $\ell^2 = \lim u_n^2$, et que ℓ est positif (car u_n l'est), on a donc $\ell = \sqrt{a^2 + 2}$.

Parmi les suites réelles divergentes, il y en a dont les termes augmentent ou diminuent indéfiniment, autrement dit, qui ont une limite infinie. Rappelons de quoi il s'agit.

2. Limites infinies

Définition 2.5. Soit (u_n) une suite réelle.

- 1) On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si la condition suivante est satisfaite : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n > A$. Si cette condition est satisfaite, on écrit que l'on a $\lim u_n = +\infty$.
- 2) On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si la condition suivante est satisfaite : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n < A$. Si cette condition est satisfaite, on écrit que l'on a $\lim u_n = -\infty$.

Une suite réelle possédant une limite infinie est parfois appelée suite divergente de première espèce. Une telle suite n'est pas bornée. Les suites réelles se répartissent en trois types, les suites convergentes, les suites divergentes de première espèce, et les autres qui n'ont pas de limites, ni finies ni infinies.

Exemples 2.4.

- 1) La suite (n) tend vers $+\infty$. En effet, d'après la propriété d'Archimède, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > A$.
- 2) La suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Proposition 2.2. Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles avec $\lim u_n = +\infty$.

- 1) On a $u_n \neq 0$ pour tout n assez grand, et la suite $(\frac{1}{u_n})$ est convergente de limite 0.
- 2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ non nul, $\lim au_n = +\infty$ ou $-\infty$ selon que a soit > 0 ou < 0 .
- 3) Si (v_n) est convergente ou bien tend vers $+\infty$, alors $(u_n) + (v_n)$ tend vers $+\infty$.
- 4) Si l'on a $v_n \geq u_n$ pour n assez grand, alors $\lim v_n = +\infty$.
- 5) Si (v_n) converge vers une limite strictement positive, alors $\lim u_n v_n = +\infty$.

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait l'inégalité $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$, i.e. $\frac{1}{u_n} < \varepsilon$, d'où la première assertion. Les trois suivantes sont immédiates et laissées en exercice. En ce qui concerne la dernière, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $v_n > \alpha$ dès que n est assez grand. On a donc $u_n v_n > \alpha u_n$ pour n assez grand, et les assertions 2 et 4 entraînent le résultat.

On peut préciser le théorème 2.1 comme suit.

Proposition 2.3. Soit (u_n) une suite réelle monotone non bornée. Si (u_n) est croissante, on a $\lim u_n = +\infty$. Si (u_n) est décroissante, on a $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration : Supposons (u_n) croissante. Dans ce cas, (u_n) n'est pas majorée, et pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe donc n_0 tel que $u_{n_0} > A$. On a ainsi $u_n > A$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $\lim u_n = +\infty$. L'argument est le même si (u_n) est décroissante.

3. Encadrements

Le résultat qui suit est très utile dans l'étude des suites réelles.

Lemme 2.5. Soient (u_n) une suite réelle convergente et a, b des nombres réels. On suppose que pour tout n assez grand, on a les inégalités $a \leq u_n \leq b$. Alors on a

$$a \leq \lim u_n \leq b.$$

Démonstration : En considérant les suites de termes généraux $u_n - a$ et $b - u_n$, il suffit de prouver que si (u_n) a ses termes positifs pour n assez grand, alors sa limite est encore positive : si elle était strictement négative, les u_n le seraient aussi pour tout n assez grand, comme on le constate directement à partir de la définition d'une suite convergente.

Les inégalités larges se conservent donc par passage à la limite. Il n'en n'est pas ainsi des inégalités strictes. Par exemple, on a $\frac{1}{n} > 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Exemple 2.5. Soit a un nombre réel. Posons pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(ka).$$

Vérifions que l'on a

$$\lim u_n = \frac{a}{2}.$$

Pour tout $k \geq 1$, on a $E(ka) \leq ka < E(ka) + 1$ i.e. $ka - 1 < E(ka) \leq ka$. Par suite, on a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (ka - 1) < u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n ka,$$

autrement dit,

$$\frac{a(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{a(n+1)}{2n}.$$

Le lemme 2.5 entraîne alors l'égalité annoncée vu que $\lim \frac{a(n+1)}{2n} = \frac{a}{2}$.

Définition 2.6 (Suites adjacentes). Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles. On dit que $((u_n), (v_n))$ est un couple de suites adjacentes si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
- 2) La suite $(v_n - u_n)$ est convergente de limite nulle.

Lemme 2.6. Soit $((u_n), (v_n))$ un couple de suites adjacentes.

- 1) Quels que soient les entiers n et p , on a $u_n \leq v_p$.

2) Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite ℓ . Pour tout n , on a $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration : 1) Supposons qu'il existe des entiers n_0 et p_0 tels que $u_{n_0} > v_{p_0}$. Pour tout $n \geq \text{Max}(n_0, p_0)$, on a les inégalités

$$u_n \geq u_{n_0} > v_{p_0} \geq v_n.$$

On obtient $|u_n - v_n| \geq u_{n_0} - v_{p_0} > 0$, ce qui contredit la condition 2 de la définition 2.6.

2) Compte tenu de la première assertion, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi (u_n) et (v_n) sont bornées. Elles sont donc convergentes (cor. 2.4). Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. La suite $(u_n - v_n)$ est convergente de limite $\ell - \ell'$, d'où $\ell = \ell'$. Par ailleurs, ℓ est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de (u_n) et est la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de (v_n) (th. 2.1), d'où les inégalités $u_n \leq \ell \leq v_n$.

On dit souvent que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si $((u_n), (v_n))$ ou $((v_n), (u_n))$ est un couple de suites adjacentes.

Remarque 2.3. Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors les ensembles $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont adjacents (prop. 1.6). L'implication réciproque est fausse, comme on le constate en considérant les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_{2n} = -1$, $u_{2n+1} = 0$, $v_{2n} = 0$, $v_{2n+1} = 1$. Elles ne sont pas adjacentes bien que les ensembles $\{-1, 0\}$ et $\{0, 1\}$ soient adjacents.

Exemple 2.6 (Moyenne arithmético-géométrique).

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par les égalités

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Vérifions que $((a_n), (b_n))$ est un couple de suites adjacentes. De l'inégalité

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$$

valable pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on déduit que $a_n \leq b_n$ pour tout n . Il en résulte que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante. Ainsi (a_n) est majorée par b et (b_n) est minorée par a . Ces suites sont donc convergentes. Posons $\ell = \lim a_n$ et $\ell' = \lim b_n$. On a $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$, d'où $\ell = \ell'$ et $(b_n - a_n)$ est convergente de limite nulle, d'où l'assertion. On dit que la limite commune de ces deux suites est la moyenne arithmético-géométrique de a et b .

4. Applications

Donnons deux applications des résultats précédents.

Théorème 2.2 (Théorème des intervalles emboîtés). Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles telles que $a_n \leq b_n$ pour tout n . Soit I_n l'intervalle fermé $[a_n, b_n]$. On suppose I_{n+1} contenu dans I_n pour tout n , et la suite $(b_n - a_n)$ convergente de limite nulle. Alors, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}.$$

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque I_{n+1} est contenu dans I_n , on a les inégalités $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Parce que $(b_n - a_n)$ tend vers 0, les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Soit ℓ leur limite commune (lemme 2.6). Pour tout n , on a $a_n \leq \ell \leq b_n$ (*loc. cit.*) i.e. ℓ est dans I_n . Par ailleurs, soit x un nombre réel appartenant à l'intersection des I_n . On a $|x - \ell| \leq b_n - a_n$ pour tout n . Le fait que $(b_n - a_n)$ soit convergente de limite nulle entraîne alors que l'on a $|x - \ell| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $x = \ell$ et le résultat.

Remarque 2.4. La conclusion de l'énoncé précédent est fausse si l'on ne suppose pas les intervalles I_n fermés. En effet, en posant $I_n =]0, \frac{1}{n+1}[$, alors I_{n+1} est contenu dans I_n , la suite $(\frac{1}{n+1})$ des longueurs des I_n tend vers 0, pour autant l'intersection des I_n est vide.

Corollaire 2.5. Soit E une partie dénombrable de \mathbb{R} . Alors $\mathbb{R} - E$ est dense dans \mathbb{R} . En particulier, \mathbb{R} n'est pas dénombrable et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Il s'agit de montrer que l'intersection $]a, b[\cap (\mathbb{R} - E)$ est non vide. Puisque E est dénombrable, il existe une suite (x_n) de nombres réels dont E soit l'ensemble des valeurs. Quitte à remplacer $]a, b[$ par un intervalle plus petit (pour l'inclusion), on peut supposer que x_0 n'appartient pas à $]a, b[$ et que l'on a $b - a < 1$. Vérifions qu'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles infinis fermés contenus dans $]a, b[$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes soient satisfaites :

- 1) I_{n+1} est contenu dans I_n .
- 2) x_n n'est pas dans I_n .
- 3) La longueur de I_n , i.e. la différence entre ses extrémités, est inférieure à $\frac{1}{2^n}$.

On prend pour I_0 n'importe quel intervalle infini fermé contenu dans $]a, b[$. Supposons I_n construit pour un entier $n \geq 0$. Il suffit alors de prendre pour I_{n+1} un intervalle infini fermé contenu dans I_n , de longueur plus petite que celle de I_n divisée par deux, et ne contenant pas x_{n+1} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $I_n = [a_n, b_n]$. Les suites (a_n) et (b_n) vérifient les hypothèses du théorème 2.2. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que l'intersection des I_n soit $\{x\}$. D'après la seconde condition, x n'est pas dans E . Ainsi x appartient à $]a, b[\cap (\mathbb{R} - E)$, donc $\mathbb{R} - E$ est dense dans \mathbb{R} . Le fait que \mathbb{Q} soit dénombrable entraîne alors le résultat.

La seconde application concerne les fonctions continues. On va prouver ici le théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie (on a déjà démontré ce résultat dans le premier chapitre comme conséquence directe de la propriété de la borne supérieure).

Théorème 2.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Tout nombre réel dans l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ est dans l'image de f .*

Démonstration : Supposons par exemple $f(a) \leq f(b)$. Soit y un nombre réel tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$. On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de $[a, b]$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons a_n et b_n définis pour un entier $n \geq 0$. Afin de définir a_{n+1} et b_{n+1} , on distingue deux cas.

1) Si l'on a $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y$, on pose

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n.$$

2) Si l'on a $y \leq f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Vérifions que les suites (a_n) et (b_n) satisfont les conditions suivantes :

1. pour tout n , on a $a_n < b_n$.
2. (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
3. Pour tout n , on a $0 < b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
4. Pour tout n , on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$.

On a $a_0 < b_0$. Soit $n \geq 0$ tel que $a_n < b_n$. Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y$, alors $a_{n+1} < b_n = b_{n+1}$. Supposons $y \leq f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. On a $a_{n+1} = a_n$, et l'inégalité $2a_n < a_n + b_n$ i.e. $a_n < b_{n+1}$, entraîne $a_{n+1} < b_{n+1}$, d'où la première condition. Par ailleurs, on a $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} > a_n$ ou bien $a_{n+1} = a_n$. Dans les deux cas, on a donc $a_{n+1} \geq a_n$. De même, on constate que l'on a $b_{n+1} \leq b_n$, d'où la seconde condition. Pour tout n , on a l'égalité

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2},$$

ce qui entraîne par récurrence la troisième condition. Par hypothèse, la quatrième condition est satisfaite si $n = 0$. Supposons qu'elle le soit pour un entier $n \geq 0$. Suivant le cas envisagé, on a

$$f(a_{n+1}) = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1}),$$

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = f(b_{n+1}),$$

d'où la dernière condition.

Il en résulte que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune. Pour tout n on a $a_n \leq \ell \leq b_n$, en particulier ℓ appartient à $[a, b]$. Puisque f est continue en ℓ , les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont convergentes de limite $f(\ell)$ (cor. 2.3). D'après la quatrième condition, on en déduit que l'on a $f(\ell) \leq y \leq f(\ell)$ (lemme 2.5) d'où $y = f(\ell)$ et le résultat.

4. Suites extraites - Valeurs d'adhérence

Définition 2.7. Soient (u_n) une suite complexe et $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite (v_n) définie par

$$v_n = u_{\rho(n)},$$

est appelée suite extraite de (u_n) au moyen de ρ .

Remarque 2.5. Soit $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\rho(n) \geq n$. On le vérifie par récurrence.

Lemme 2.7. Soit (u_n) une suite complexe convergente de limite ℓ . Toute suite extraite de (u_n) est convergente de limite ℓ .

Démonstration : Soit (v_n) une suite extraite de (u_n) au moyen d'une application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Soit ε un nombre réel > 0 . Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $\rho(n) \geq n \geq n_0$ d'où $|v_n - \ell| < \varepsilon$ et l'assertion.

Exemples 2.7.

1) Soit (u_n) une suite complexe. Alors, (u_n) est convergente si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de même limite.

En effet, supposons (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergentes de même limite ℓ . Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$ pour tout n assez grand, ce qui entraîne que (u_n) converge vers ℓ . La réciproque est une conséquence du lemme 2.7.

2) Soit (u_n) une suite complexe. Si les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes, il en est de même de (u_n) .

En effet, la suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}) . La suite (u_{6n}) est donc convergente et (u_{2n}) et (u_{3n}) convergent vers la même limite. De même, la suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) , donc (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent aussi vers la même limite. L'exemple précédent entraîne alors le résultat.

3) Prouvons le lemme suivant.

Lemme 2.8. Soit (u_n) une suite réelle.

- 1) Si (u_n) n'est pas majorée, on peut en extraire une suite strictement croissante tendant vers $+\infty$.
- 2) Si (u_n) n'est pas minorée, on peut en extraire une suite strictement décroissante tendant vers $-\infty$.

Démonstration : 1) Vérifions qu'il existe une suite (n_k) d'entiers naturels telle que pour tout $k \geq 0$ on ait

$$n_{k+1} > n_k \quad \text{et} \quad u_{n_{k+1}} > \text{Max}(k, u_{n_k}).$$

Prenons par exemple $n_0 = 0$. Soit alors k un entier tel que n_k soit défini. Posons

$$A_k = \left\{ p \in \mathbb{N} \mid p > n_k \quad \text{et} \quad u_p > \text{Max}(k, u_{n_k}) \right\}.$$

Puisque (u_n) n'est pas majorée, A_k n'est pas vide. On définit alors n_{k+1} comme étant le plus petit élément de A_k (toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément). Cela établit l'assertion. L'application $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\rho(k) = n_k$ est strictement croissante. La suite $(u_{\rho(n)})$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, d'où la première assertion.

2) Si (u_n) n'est pas minorée, la suite $(-u_n)$ n'est pas majorée, et la première assertion entraîne alors le résultat.

Valeurs d'adhérence

Définition 2.8. Soient (u_n) une suite complexe et ℓ un nombre complexe. On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) convergente vers ℓ .

Proposition 2.4. Soient (u_n) une suite complexe et ℓ un nombre complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) l'élément ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) .
- 2) Pour tout $r > 0$ il existe infinité d'entiers n tels que l'on ait $|u_n - \ell| < r$.
- 3) Pour tout $r > 0$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq p$ tel que l'on ait $|u_n - \ell| < r$.

Démonstration : Supposons que ℓ soit une valeur d'adhérence de (u_n) . Soit r un nombre réel strictement positif. Il existe une application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et un entier n_0 tels que l'on ait $|u_{\rho(n)} - \ell| < r$ pour tout $n \geq n_0$, d'où la seconde condition, vu que ρ est injective. Par ailleurs, il est immédiat que la condition 2 entraîne la condition 3. Supposons la condition 3 satisfaite. Il existe alors une suite d'entiers (n_k) strictement croissante telle que l'on ait pour tout $k \geq 0$

$$(12) \quad |u_{n_k} - \ell| < \frac{1}{k+1}.$$

En effet, on choisit n_0 le plus petit entier naturel tel que l'on ait $|u_{n_0} - \ell| < 1$. Pour tout $k \geq 1$, on définit n_k comme étant le plus petit entier strictement plus grand que n_{k-1} vérifiant la condition (12). La suite (u_{n_k}) est extraite de (u_n) et converge vers ℓ , d'où la condition 1 et le résultat.

Remarque 2.6. Une valeur d'adhérence d'une suite complexe est un point adhérent à l'ensemble de ses valeurs (prop. 2.4). La réciproque est fausse. Par exemple, la suite (n) n'a pas de valeur d'adhérence, car pour toute application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on a $\rho(n) \geq n$, mais tout entier n est adhérent à l'ensemble des valeurs de la suite, car c'est un élément de cet ensemble.

Le résultat qui suit est parfois utile pour déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite complexe.

Proposition 2.5. Soient (u_n) une suite complexe et $\rho_1, \dots, \rho_t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ des applications strictement croissantes telles que les suites extraites de (u_n) au moyen des ρ_i soient convergentes. Posons

$$\ell_i = \lim u_{\rho_i(n)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, t.$$

Supposons que l'on ait

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^t \rho_i(\mathbb{N}).$$

Alors, l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$.

Démonstration : Pour tout i posons $E_i = \rho_i(\mathbb{N})$. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite (u_n) . Il existe une application $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\rho(n)})$ converge vers ℓ . Posons $E = \rho(\mathbb{N})$. D'après l'hypothèse faite, E est contenu dans la réunion des E_i , donc E est la réunion des $E \cap E_i$. Puisque E est infini, il existe i entre 1 et t tel que $E \cap E_i$ soit infini. Vérifions l'égalité

$$(13) \quad \ell = \ell_i,$$

ce qui établira le résultat. Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|u_{\rho(n)} - \ell| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|u_{\rho_i(n)} - \ell_i| < \varepsilon$ dès que $n \geq n_1$. Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Parce que $E \cap E_i$ est infini, il existe des entiers p et q plus grands que N tels que l'on ait

$$\rho(p) = \rho_i(q).$$

On en déduit que l'on a

$$|\ell - \ell_i| \leq |u_{\rho(p)} - \ell| + |u_{\rho_i(q)} - \ell_i| + |u_{\rho(p)} - u_{\rho_i(q)}| < 2\varepsilon.$$

d'où l'égalité (13).

Exemples 2.8.

- 1) Les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$ sont -1 et 1 .
- 2) Les valeurs d'adhérence de la suite

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

sont 0 et 1 .

3) Les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos \frac{n\pi}{2})$ sont $-1, 0$ et 1 , comme on le constate en considérant ses suites extraites au moyen des applications qui à n associent $4n + k$ pour $0 \leq k \leq 3$.

4) Pour tout entier $n \geq 1$, notons $v_2(n)$ l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers. Vérifions que \mathbb{N} est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_2(n))$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on considère pour cela l'application $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi_k(n) = 2^k 3^n$. C'est une application strictement croissante et la suite extraite de $(v_2(n))$ au moyen de φ_k est constante égale à k , donc est convergente de limite k . Ainsi tout entier naturel est valeur d'adhérence de $(v_2(n))$. Par ailleurs, si x est un nombre réel qui n'est pas dans \mathbb{N} , il existe $r > 0$ tel que l'intervalle $]x - r, x + r[$ ne contienne aucun terme de la suite car $v_2(n)$ est dans \mathbb{N} , en particulier x n'est pas une valeur d'adhérence (prop. 2.4), d'où l'assertion.

5. Théorème de Bolzano -Weierstrass

Il s'agit du résultat suivant :

Théorème 2.4. *Toute suite complexe bornée possède une valeur d'adhérence. Autrement dit, de toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.*

Démonstration : On commence par démontrer ce résultat pour les suites réelles. C'est dans ce cas une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.9. *De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.*

Démonstration : Soit (x_n) une suite réelle. Compte tenu du lemme 2.8, on peut supposer que (x_n) est majorée. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$X_k = \{x_n \mid n \geq k\}.$$

C'est une partie non vide majorée de \mathbb{R} . Notons $\text{Sup } X_k$ sa borne supérieure. On distingue deux cas.

1) Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $x_n \neq \text{Sup } X_{n_0}$.
On a en particulier

$$x_{n_0} < \text{Sup } X_{n_0}.$$

Puisque x_{n_0} ne majore pas X_{n_0} , il existe un plus petit entier $n_1 > n_0$ tel que $x_{n_0} < x_{n_1}$.
Considérons alors pour tout $k \geq 1$ la propriété $P(k)$ suivante : il existe un k -uplet d'entiers (n_1, \dots, n_k) satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) $n_0 < n_1 < \dots < n_k$.
- 2) $x_{n_0} < x_{n_1} < \dots < x_{n_k}$.
- 3) Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, n_i est le plus petit élément de l'ensemble des entiers $n \geq n_0$ tel que $x_{n_{i-1}} < x_{n_i}$.

La propriété $P(1)$ est vraie. Soit $k \geq 1$ un entier tel que $P(k)$ soit vraie. D'après l'hypothèse faite, on a $x_{n_k} < \text{Sup } X_{n_0}$, donc il existe un entier $t \geq n_0$ tel que l'on ait

$$x_{n_k} < x_t.$$

L'ensemble des entiers $n \geq n_0$ tel que $x_{n_k} < x_n$ est non vide, donc possède un plus petit élément n_{k+1} . On a $x_{n_{k-1}} < x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. D'après le caractère minimal de n_k on a $n_k < n_{k+1}$, donc $P(k+1)$ est vraie. Il existe ainsi une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que (x_{n_k}) soit strictement croissante, d'où le résultat dans ce cas.

2) Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq k$ tel que l'on ait $x_n = \text{Sup } X_k$. Il existe alors un plus petit entier n_0 tel que l'on ait

$$x_{n_0} = \text{Sup } X_0.$$

Considérons l'ensemble X_{n_0+1} . Par hypothèse, il existe un plus petit entier $n_1 \geq n_0 + 1$ tel que l'on ait $x_{n_1} = \text{Sup } X_{n_0+1}$. Vu que X_{n_0+1} est contenu dans X_0 , on a $x_{n_1} \leq x_{n_0}$. On construit ainsi par récurrence une suite (n_k) d'entiers strictement croissante telle que pour tout $k \geq 1$ on ait $x_{n_k} = \text{Sup } X_{n_{k-1}+1}$. Puisque X_{n_k+1} est contenu dans $X_{n_{k-1}+1}$, on a $x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k}$ pour tout $k \geq 1$. La suite (x_{n_k}) est extraite de (x_n) et est décroissante, d'où le résultat.

Soit alors (u_n) une suite réelle bornée. On extrait de (u_n) une suite monotone. Elle est bornée, car tel est le cas de (u_n) , elle est donc convergente (cor. 2.4).

Le théorème se déduit comme suit. Soit (u_n) une suite bornée de nombres complexes. Pour tout $n \geq 0$, posons $u_n = x_n + iy_n$ où x_n et y_n sont dans \mathbb{R} . Puisque (u_n) est bornée, il en est de même des suites (x_n) et (y_n) , vu que l'on a $|x_n| \leq |u_n|$ et $|y_n| \leq |u_n|$. Compte tenu de ce qui précède, il existe une application $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\rho(n)})$ soit convergente. La suite réelle $(y_{\rho(n)})$ est bornée donc on peut en extraire une suite convergente, i.e. il existe $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(y_{\rho \circ \nu(n)})$ soit convergente. La suite $(x_{\rho \circ \nu(n)})$, qui est extraite de $(x_{\rho(n)})$, est aussi convergente. Il en résulte que la suite $(u_{\rho \circ \nu(n)})$, qui est extraite de (u_n) , est convergente. Cela établit le théorème.

Exemples 2.9.

Donnons quelques applications de ce résultat.

Corollaire 2.6. *Soit (u_n) une suite complexe bornée. Alors (u_n) est convergente si et seulement si (u_n) possède une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration : Si (u_n) est convergente, le fait qu'elle possède une unique valeur d'adhérence résulte du lemme 2.7. Inversement, supposons que (u_n) possède une unique valeur d'adhérence a . Il s'agit de montrer que (u_n) converge vers a . Supposons le contraire. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ avec $|u_p - a| > \varepsilon$. On en déduit l'existence d'une application $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_{\rho(n)} - a| > \varepsilon$: soit n_0 le plus petit entier naturel tel que $|u_{n_0} - a| > \varepsilon$, et pour tout $k \geq 1$, soit n_k le plus petit entier $p \geq n_{k-1} + 1$ tel que $|u_p - a| > \varepsilon$. On pose ensuite $\rho(k) = n_k$ pour tout k . Puisque (u_n) est bornée, il en est de même de $(u_{\rho(n)})$. Cette suite possède donc une valeur d'adhérence b (th. 2.4) i.e. il existe une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\rho(\psi(n))})$ converge vers b . La suite $(|u_{\rho(\psi(n))} - a|)$ est donc convergente de limite $|b - a|$ (prop. 2.1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{\rho(\psi(n))} - a| > \varepsilon$, d'où $|b - a| \geq \varepsilon$ (lemme 2.5). On a en particulier $b \neq a$, d'où une contradiction car b est une valeur d'adhérence de (u_n) .

Remarque 2.7. On notera que la suite (u_n) définie par

$$u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = n,$$

qui n'est pas bornée, possède 0 comme seule valeur d'adhérence (cf. prop. 2.4), mais n'est pas convergente.

Corollaire 2.7. *Soit (u_n) une suite complexe telle que la suite $(|u_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. Alors (u_n) possède une valeur d'adhérence.*

Démonstration : Il existe une suite extraite de (u_n) qui est bornée. En effet, d'après l'hypothèse faite, il existe $A > 0$ tel que pour tout entier k , il existe $n \geq k$ avec $|u_n| < A$, d'où l'existence d'une suite strictement croissante (n_k) d'entiers naturels telle que l'on ait $|u_{n_k}| < A$. Le théorème 2.4 entraîne alors l'assertion.

Corollaire 2.8. *Soient (p_n) et (q_n) deux suites d'entiers naturels telles que, pour tout n on ait $q_n \neq 0$, et que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ soit convergente de limite irrationnelle. Alors, on a*

$$\lim p_n = \lim q_n = +\infty.$$

Démonstration : Supposons que (q_n) ne tende pas vers $+\infty$. Il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(q_{\varphi(n)})$ soit convergente (cor. 2.7).

Notons q sa limite. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|q_{\varphi(n)} - q| < 1$. Puisque $(q_{\varphi(n)})$ est une suite d'entiers non nuls, on a ainsi

$$q \neq 0 \quad \text{et} \quad q_{\varphi(n)} = q \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Soit x la limite de $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$. Pour tout n assez grand, on a

$$\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q},$$

donc la suite $\left(\frac{p_{\varphi(n)}}{q}\right)$ est convergente de limite x . Il en résulte que la suite $(p_{\varphi(n)})$ est convergente de limite qx . Parce que $(p_{\varphi(n)})$ est une suite d'entiers, qx est donc un entier i.e. x est rationnel, d'où une contradiction. On en déduit que (p_n) tend vers $+\infty$. Sinon on pourrait extraire de (p_n) une suite convergente $(p_{\psi(n)})$ (*loc.cit.*). Vu que $(q_{\psi(n)})$ tend vers $+\infty$, la suite $\left(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}\right)$ serait convergente de limite nulle, ce qui conduit à une contradiction car x est non nul.

6. Suites de Cauchy

Définition 2.9. Soit (u_n) une suite complexe. On dit que (u_n) est de Cauchy si la condition suivante est satisfaite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tous p et q dans \mathbb{N} , on ait l'implication

$$p \geq n_0 \quad \text{et} \quad q \geq n_0 \implies |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Lemme 2.10. Toute suite complexe convergente est de Cauchy.

Démonstration : Soit (u_n) une suite complexe convergente de limite ℓ . Soit ε un nombre réel strictement positif. Pour tout n assez grand on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tous p et q assez grands, on a donc $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \varepsilon$, d'où l'assertion.

Lemme 2.11. Toute suite complexe de Cauchy est bornée.

Démonstration : Il existe un entier n_0 tel que l'on ait $|u_p - u_q| < 1$ pour tous p et q plus grands que n_0 . En particulier, on a $|u_p - u_{n_0}| < 1$ pour tout $p \geq n_0$. Posons

$$M = \text{Max}(1, |u_0 - u_{n_0}|, |u_1 - u_{n_0}|, \dots, |u_{n_0-1} - u_{n_0}|).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - u_{n_0}| \leq M$. Les inégalités $|u_n| \leq |u_{n_0}| + |u_{n_0} - u_n| \leq |u_{n_0}| + M$ entraînent alors l'assertion.

Exemple 2.10. Soient x_0 et x_1 des nombres complexes et (x_n) la suite définie par

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Vérifions que (x_n) est une suite de Cauchy. Soit n un entier naturel. On a l'égalité

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{2}.$$

On en déduit par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_1 - x_0|}{2^n}.$$

Par ailleurs, pour tout entier k , on a

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |x_{n+k-j} - x_{n+k-(j+1)}|.$$

Il en résulte que l'on a les inégalités

$$|x_{n+k} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^{n+k-(j+1)}} \leq \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} < \varepsilon$, ce qui entraîne pour tous p et $q \geq n_0$ l'inégalité $|x_p - x_q| < \varepsilon$, et le résultat.

Le résultat fondamental concernant les suites de Cauchy est le suivant :

Théorème 2.5 (Critère de Cauchy). *Soit (u_n) une suite complexe. Alors (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration : Toute suite convergente est de Cauchy (lemme 2.10). Inversement, supposons que (u_n) soit une suite de Cauchy. Elle est bornée (lemme 2.11). D'après le théorème de Bolzano -Weierstrass, il existe donc une application strictement croissante $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(u_{\rho(n)})$ soit convergente. Soit ℓ sa limite. Vérifions que (u_n) est convergente de limite ℓ . Soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$|u_{\rho(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p et q plus grands que n_1 on ait

$$|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \text{Max}(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq N$, on a les inégalités

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\rho(n)}| + |u_{\rho(n)} - \ell| < |u_n - u_{\rho(n)}| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vu que $\rho(n) \geq n$, on a $|u_n - u_{\rho(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où l'on déduit que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et le résultat.

Exemple 2.11. Soit (s_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Ce n'est pas une suite Cauchy. En effet, on a

$$(14) \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

vu que chaque terme de la somme est supérieur à $\frac{1}{2n}$. La suite (s_n) est donc divergente.

Remarque 2.8. Il existe des suites d'éléments de \mathbb{Q} qui sont de Cauchy et qui ne sont pas convergentes dans \mathbb{Q} . En effet, soit x un nombre irrationnel. Pour tout $n \geq 1$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $]x, x + \frac{1}{n}[$ (\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}). On en déduit l'existence d'une suite (r_n) d'éléments de \mathbb{Q} telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $x < r_n < x + \frac{1}{n}$. La suite (r_n) est convergente de limite x . Elle est donc de Cauchy et sa limite n'est pas dans \mathbb{Q} .

On utilisera plus loin le résultat important qui suit, appelé parfois le théorème du point fixe, pour le calcul approché des racines d'une équation. C'est une conséquence du théorème 2.5.

Théorème 2.6 (Théorème du point fixe). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant la condition suivante : il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que l'on ait pour tous x et y réels l'inégalité

$$(15) \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

Soient x_0 un nombre réel et (x_n) la suite définie par l'égalité

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Alors, (x_n) est convergente, et sa limite ℓ est l'unique point fixe de f . De plus, on a

$$(16) \quad |\ell - x_n| \leq |x_1 - x_0| \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : On vérifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n |x_1 - x_0|.$$

Il en résulte que (x_n) est de Cauchy. En effet, pour tous entiers naturels p et q tels que $q \geq p$, on a les inégalités

$$(17) \quad |x_q - x_p| \leq |x_1 - x_0| \sum_{j=p}^{q-1} \lambda^j \leq |x_1 - x_0| \frac{\lambda^p}{1 - \lambda},$$

d'où l'assertion, car λ étant positif strictement plus petit que 1, la suite (λ^n) tend vers 0. Ainsi (x_n) est convergente de limite ℓ (th. 2.5). Par ailleurs, on déduit de la condition (15) que f est continue sur \mathbb{R} . D'après le corollaire 2.3, la suite $(f(x_n))$ est convergente de limite $f(\ell)$. Puisque la suite (x_{n+1}) est convergente de limite ℓ , d'après l'unicité de la limite, on a donc $f(\ell) = \ell$ i.e. ℓ est un point fixe de f . Supposons alors qu'il existe $\ell' \neq \ell$ tel que $f(\ell') = \ell'$. Dans ce cas on a, en utilisant (15),

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq \lambda |\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|,$$

d'où une contradiction, et ℓ est l'unique point fixe de f .

Soit n un entier naturel fixé. D'après (17), on a pour tout $p \geq n$ l'inégalité

$$|x_p - x_n| \leq |x_1 - x_0| \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}.$$

La suite $(|x_p - x_n|)$ est convergente de limite $|\ell - x_n|$ (prop. 2.1), et par passage à la limite (sur p) dans l'inégalité précédente, on obtient l'estimation (16).