

## Chapitre XII - Équations différentielles

### Table des matières

1. Équations différentielles du premier ordre	1
2. Énoncé du théorème de Cauchy	4
3. Équations à variables séparées	5
4. Équations linéaires du premier ordre	8
5. Fonctions complexes d'une variable réelle	12
6. Équations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants	14
7. Résolution avec second membre	18
8. Cas d'une fonction exponentielle polynôme	21
9. Équations de Ricatti	24

Tous les intervalles de  $\mathbb{R}$  considérés dans ce chapitre sont supposés infinis.

### 1. Équations différentielles du premier ordre

Soient  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs réelles. L'équation

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

dans laquelle  $y = y(x)$  est une fonction inconnue de dérivée  $y'$ , s'appelle une équation différentielle du premier ordre. On précise parfois en disant qu'elle est résoluble en  $y'$ . On va s'intéresser dans ce qui suit à la résolution de l'équation (1) dans des cas particuliers.

**Définition 12.1.** On appelle solution de (1) toute fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, vérifiant les conditions suivantes :

- 1) elle est dérivable sur  $I$ .
- 2) Son graphe est contenu dans  $\Omega$ .
- 3) Pour tout  $x \in I$ , on a l'égalité

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

**Définition 12.2.** Une solution  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (1) est dite maximale, s'il n'existe pas de fonction  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $J$  contenant strictement  $I$ , qui soit solution de (1) et qui prolonge  $\varphi$  i.e. telle que pour tout  $x \in I$  on ait  $\psi(x) = \varphi(x)$ .

En utilisant le lemme de Zorn, on peut démontrer le résultat suivant que l'on admettra.

**Théorème 12.1.** Toute solution de (1) se prolonge en une solution maximale.

### Exemples 12.1.

1) Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ . Soit  $a$  un point de  $I$ . Les solutions maximales de l'équation différentielle  $y' = f(x)$  sont les fonctions  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(x) = \int_a^x f + \lambda,$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  (cor. 7.9).

2) Les solutions maximales de l'équation  $y' = y$  sont les fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme  $\varphi(x) = \lambda e^x$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  (exemple 6.3).

3) Soit  $\alpha$  un nombre réel distinct de 1. Considérons l'équation

$$(2) \quad y' = y^\alpha.$$

Avec les notations du départ, en posant  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , l'équation (2) est de la forme  $y' = f(x, y)$  où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $f(x, y) = y^\alpha$ . (C'est une équation de la forme  $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ , dite de Bernoulli. Pour la résoudre, l'idée est de poser  $z = y^{1-\alpha}$ , afin de se ramener à une équation linéaire en la fonction inconnue  $z$ .) Démontrons que chaque solution de (2) est une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(3) \quad \varphi(x) = \left( (1-\alpha)(x-\lambda) \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et où  $I$  est un intervalle tel que

$$(4) \quad I \subseteq ]\lambda, +\infty[ \quad \text{si} \quad \alpha < 1 \quad \text{et} \quad I \subseteq ]-\infty, \lambda[ \quad \text{si} \quad \alpha > 1.$$

On vérifie d'abord que les fonctions de cette forme sont solutions de (2). Inversement, soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de (2) définie sur un intervalle  $I$ . Pour tout  $x \in I$  on a

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = \varphi(x)^\alpha.$$

Soit  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Elle est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  on a  $\psi'(x) = 1$ . Par suite, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in I$  on ait (lemme 7.7)

$$\psi(x) = x - \lambda.$$

Pour tout  $x \in I$ , on a donc  $(1 - \alpha)(x - \lambda) > 0$ , ce qui conduit aux conditions (3) et (4).

Voyons l'interprétation géométrique des solutions de l'équation (1). Pour tout point  $M = (x, y) \in \Omega$ , notons  $\Delta_M$  la droite affine de  $\mathbb{R}^2$  passant par  $M$  et de direction la droite engendrée par le vecteur  $(1, f(x, y))$ . L'équation de  $\Delta_M$  est

$$Y = f(x, y)(X - x) + y.$$

**Proposition 12.1.** *Soient  $I$  un intervalle et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et dérivable sur  $I$ . Supposons que son graphe  $\Gamma$  soit contenu dans  $\Omega$ . Pour que  $\varphi$  soit solution de l'équation (1) il faut et il suffit que pour tout point  $M \in \Gamma$ , la tangente à  $\Gamma$  en  $M$  soit la droite  $\Delta_M$ .*

Démonstration : Soit  $M = (x, y)$  un point de  $\Gamma$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la droite passant par  $M$  et de direction la droite engendrée par le vecteur  $(1, \varphi'(x))$ . Supposons que  $\varphi$  soit solution de l'équation  $y' = f(x, y)$ . Puisque l'on a  $y = \varphi(x)$  et  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ , cette tangente est donc  $\Delta_M$ . Inversement, soit  $x$  un élément de  $I$ . Posons  $M = (x, \varphi(x))$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  étant  $\Delta_M$ , on a  $f(x, \varphi(x)) = \varphi'(x)$ , d'où le résultat.

**Exemple 12.2.** Considérons l'équation différentielle

$$(5) \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Dans cet exemple,  $\Omega$  est  $\mathbb{R}^2$  privé de la droite  $y = 0$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ . Posons  $O = (0, 0)$ . Soit  $M = (x, y)$  un point de  $\Omega$ . Si  $x \neq 0$  la direction de la droite  $\langle O, M \rangle$  est engendrée par le vecteur  $(1, \frac{y}{x})$ . Le produit scalaire des vecteurs  $(1, \frac{y}{x})$  et  $(1, f(x, y))$  étant nul, la droite  $\Delta_M$  est la droite orthogonale à  $\langle O, M \rangle$  passant par  $M$ . Tel est aussi le cas si  $x = 0$ . Par suite,  $\Delta_M$  est la tangente au cercle de centre  $O$  passant par  $M$ . Si  $r = OM$ , on a  $r > 0$ , et cette tangente est donc celle du graphe de l'une des deux fonctions définies sur l'intervalle  $[-r, r]$  par les égalités

$$(6) \quad \varphi_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Compte tenu de la proposition précédente, les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  définie par (6) sur l'intervalle ouvert  $] -r, r[$  sont solutions de l'équation (5). Elles sont maximales car une fonction continue les prolongeant strictement doit s'annuler pour  $x = \pm r$ , ce qui est exclu. On peut évidemment vérifier directement que l'on obtient ainsi des solutions maximales

de (5). La proposition 12.1 a permis de les prévoir géométriquement. On constatera dans le paragraphe suivant que l'on obtient ainsi toutes les solutions maximales de (5).

## 2. Énoncé du théorème de Cauchy

Cauchy en 1824 a démontré le résultat suivant que nous admettrons.

**Théorème 12.2.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et continue sur  $U$ . Supposons que l'application dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , de  $f$  par rapport à  $y$ , existe et soit continue sur  $U$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $U$ . Alors, il existe une unique solution maximale  $\varphi$  de l'équation  $y' = f(x, y)$  telle que  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Exemple 12.3.** Vérifions que dans l'exemple 12.2, on a obtenu toutes les solutions maximales de l'équation (5). Avec les notations utilisées dans cet exemple,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\Omega$ . Sa fonction dérivée partielle par rapport à  $y$  existe et est continue sur  $\Omega$ , car elle est définie par l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y^2}.$$

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une solution maximale de (5). Soit  $x_0$  un point de  $I$ . Posons  $y_0 = \varphi(x_0)$  et  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Si  $y_0 > 0$ , on a vu que la fonction  $\psi : ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\psi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

est une solution maximale de (5), et elle vérifie l'égalité  $\psi(x_0) = y_0$ . D'après le théorème de Cauchy, on a donc  $I = ]-r, r[$  et  $\varphi = \psi$ . De même, si  $y_0 < 0$ , on constate que  $\varphi$  est la fonction qui à  $x$  associe  $-\sqrt{r^2 - x^2}$  sur  $]-r, r[$ , d'où l'assertion.

**Exemple 12.4.** Posons  $U = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  et prenons pour  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction

$$f(x, y) = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2xy}.$$

Elle satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy. Soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $U$ . Vérifions que la solution maximale de l'équation (de Bernoulli)

$$(7) \quad y' = f(x, y),$$

qui envoie  $x_0$  sur  $y_0$ , est la fonction

$$\varphi : \left] \frac{x_0}{1 + y_0^2}, +\infty \right[ \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par l'égalité

$$(8) \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{(1 + y_0^2)x}{x_0} - 1}.$$

Soit  $y$  une solution de (7). On a

$$yy' = \frac{y^2}{2x} + \frac{1}{2x}.$$

En posant  $z = y^2$ , on obtient l'égalité

$$(9) \quad z' = \frac{z}{x} + \frac{1}{x}.$$

L'équation (9) est linéaire du premier ordre, et on constatera plus loin que ses solutions sont de la forme

$$z(x) = \lambda x - 1 \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque  $z$  est à valeurs positives il convient de se limiter aux réels  $\lambda > 0$ . On en déduit que les solutions maximales de (7) sont les fonctions  $y : ]\frac{1}{\lambda}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$y(x) = \sqrt{\lambda x - 1}.$$

L'égalité  $y(x_0) = y_0$  conduit alors à l'égalité (8).

### 3. Équations à variables séparées

Soient  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : J \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues respectivement sur  $I$  et  $J$ . L'équation différentielle

$$(10) \quad y' = a(x)b(y),$$

est dite à variables séparées. C'est un cas particulier de l'équation (1) avec  $\Omega = I \times J$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = a(x)b(y)$ .

Supposons que  $b$  ne s'annule pas sur  $J$  i.e. que l'on ait

$$(11) \quad b(y) \neq 0 \quad \text{pour tout } y \in J.$$

La fonction  $\frac{1}{b}$  est alors définie et continue sur  $J$ . Soit  $B$  une primitive de  $\frac{1}{b}$  sur  $J$ .

**Proposition 12.2.** *Soient  $I'$  un intervalle contenu dans  $I$  et  $\varphi : I' \rightarrow J$  une fonction définie et dérivable sur  $I'$ , à valeurs dans  $J$ . Pour que  $\varphi$  soit solution de (10) il faut et il suffit que la fonction  $B \circ \varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  soit une primitive de  $a$  sur  $I'$ .*

Démonstration : Pour tout  $x \in I'$  on a l'égalité

$$\frac{\varphi'(x)}{b(\varphi(x))} = (B \circ \varphi)'(x).$$

Par ailleurs,  $\varphi$  est une solution de (10) si et seulement si on a

$$\varphi'(x) = a(x)b(\varphi(x)),$$

ce qui entraîne l'assertion.

D'après l'hypothèse (11), la fonction  $b$  garde un signe constant sur  $J$ . Par suite,  $B$  est strictement monotone sur  $J$ . Puisqu'elle est continue sur  $J$  (et même de classe  $C^1$ ),  $B$  est donc un homéomorphisme de  $J$  sur  $B(J)$  (cor. 5.2). On en déduit les deux énoncés suivants :

**Corollaire 12.1.** *Soient  $I'$  un intervalle contenu dans  $I$  et  $\varphi : I' \rightarrow J$  une fonction définie et dérivable sur  $I'$ , à valeurs dans  $J$ , qui soit une solution de (10). Pour tout  $x \in I'$ , on a*

$$\varphi(x) = (B^{-1} \circ A)(x),$$

où  $A : I' \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de  $a$  sur  $I'$ .

Démonstration : La fonction  $A = B \circ \varphi$  est une primitive de  $a$  sur  $I'$  (prop. 12.2), et son image est contenue dans  $B(J)$ , d'où le résultat.

**Corollaire 12.2.** *Supposons que  $I$  et  $J$  soient des intervalles ouverts. Soit  $(x_0, y_0)$  un élément de  $I \times J$ . Il existe une unique primitive  $A$  de  $a$  définie sur  $I$  telle que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- 1) *il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  soit contenu dans  $I$  et que  $A([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$  soit contenu dans  $B(J)$ .*
- 2) *La fonction  $\varphi : ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  par*

$$\varphi(x) = (B^{-1} \circ A)(x),$$

*est une solution de (10) et vérifie l'égalité  $\varphi(x_0) = y_0$ .*

Démonstration : Soit  $F$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . Posons

$$\lambda = B(y_0) - F(x_0) \quad \text{et} \quad A = F + \lambda.$$

La fonction  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de  $a$  sur  $I$  et l'on a  $A(x_0) = B(y_0)$ . Puisque  $A$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ,  $A(x)$  soit dans  $B(J)$ . Par ailleurs, compte tenu de la condition (11), la fonction  $\varphi : ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x) = (B^{-1} \circ A)(x)$  est dérivable sur  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  (cor. 6.1). Elle vérifie l'égalité  $\varphi(x_0) = y_0$ , et d'après la proposition 12.2, c'est une solution de (10). Cela établit l'assertion d'existence. En ce qui concerne l'unicité, si  $A_1$  et  $A_2$  sont des primitives de  $a$

sur  $I$  satisfaisant les deux conditions de l'énoncé, on a  $A_1(x_0) = A_2(x_0) = B(y_0)$ . Puisque deux primitives de  $a$  sur  $I$  qui coïncident en un point sont égales, on obtient  $A_1 = A_2$ .

**Exemple 12.5.** Prenons  $I = J = ]0, +\infty[$ , et pour  $a$  et  $b$  les fonctions définies par les égalités  $a(x) = \frac{1}{x}$  et  $b(y) = y^2$ . Vérifions que les solutions maximales de l'équation

$$(12) \quad y' = \frac{y^2}{x},$$

sont les fonctions de la forme

$$(13) \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\text{Log}(x) + k} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R},$$

définies sur l'intervalle  $]0, e^{-k}[$ . Notons que les fonctions de la forme (13) définies sur  $]e^{-k}, +\infty[$  ne sont pas solutions de (12) avec  $I = J = ]0, +\infty[$ , vu que le graphe d'une solution doit être contenu dans  $I \times J$ . On vérifie d'abord que les fonctions de la forme (13) sur  $]0, e^{-k}[$  sont des solutions maximales de (12). Inversement, soient  $I'$  un intervalle contenu dans  $]0, +\infty[$  et  $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I'$  solution de (12). D'après la proposition 12.2, la fonction définie sur  $I'$  qui à  $x$  associe  $-\frac{1}{\varphi(x)}$  est une primitive de  $a$  sur  $I'$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$-\frac{1}{\varphi(x)} = \text{Log } x + k,$$

d'où l'assertion.

**Remarque 12.1.** D'après le théorème de Cauchy, il existe unique solution maximale de l'équation (12) qui envoie 1 sur 1. Compte tenu de ce qui précède, il s'agit de la fonction  $\varphi : ]0, e[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par l'égalité

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - \text{Log } x}.$$

**Exemple 12.6.** Prenons  $I = J = \mathbb{R}$  et pour  $a$  et  $b$  les fonctions définies par les égalités  $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et  $b(y) = 1 + y^2$ . Démontrons que les solutions maximales de l'équation

$$(14) \quad y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2},$$

sont les suivantes :

- 1) la fonction identité sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) La fonction  $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$  définie sur  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$ .

3) Les fonctions de la forme

$$\varphi(x) = \frac{x+k}{1-kx} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}, k \neq 0,$$

définies sur l'un des intervalles

$$\left] -\infty, \frac{1}{k} \right[ \quad \text{et} \quad \left] \frac{1}{k}, +\infty \right[.$$

Tout d'abord, on vérifie directement que les fonctions définies dans les trois cas sont des solutions maximales de (14). Inversement, soient  $I'$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I'$  solution de (14). D'après la proposition 12.2, la fonction définie sur  $I'$  qui à  $x$  associe  $\text{Arctg } \varphi(x)$  est une primitive de  $a$  sur  $I'$ . Par suite, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\text{Arctg } \varphi(x) = \text{Arctg } x + \lambda \quad \text{pour tout } x \in I'.$$

Il en résulte que l'on a

$$\varphi(x) = \text{tg}(\text{Arctg } x + \lambda) \quad \text{pour tout } x \in I'.$$

Si  $\lambda$  est dans  $\pi\mathbb{Z}$ , on obtient  $\varphi(x) = x$  et l'on peut prendre  $I' = \mathbb{R}$ .

Si  $\lambda$  est dans  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , la fonction tangente étant périodique de période  $\pi$ , on a dans ce cas

$$\varphi(x) = \text{tg}\left(\text{Arctg } x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{tg}\left(-\text{Arctg } \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x},$$

et le plus grand intervalle possible pour  $I'$  est  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$ .

Supposons que  $\lambda$  ne soit pas dans  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  ni dans  $\pi\mathbb{Z}$ . En posant  $k = \text{tg } \lambda$ , on obtient

$$\varphi(x) = \frac{x+k}{1-kx} \quad \text{avec } k \neq 0,$$

et l'on est dans le troisième cas annoncé, d'où l'assertion.

**Remarque 12.2.** La solution maximale de l'équation (14) qui envoie 0 sur 1 est la fonction  $\varphi : ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par l'égalité

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{1-x}.$$

#### 4. Équations linéaires du premier ordre

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions définies et continues sur  $I$ . L'équation

$$(15) \quad y' = a(x)y + b(x)$$



s'appelle une équation différentielle linéaire du premier ordre. On dit que l'équation

$$(16) \quad y' = a(x)y$$

est l'équation homogène associée à l'équation (15).

Notons  $D^1(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur  $I$ . Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension infinie (la famille  $(x^n)$  est libre). Dans ce qui suit, on appelle solution de (15) toute fonction  $\varphi \in D^1(I, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $x \in I$ , on ait  $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)$ . On adopte la définition analogue pour (16).

**Proposition 12.3.** *Soit  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . Soit  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $x \in I$  par l'égalité*

$$(17) \quad \varphi_0(x) = e^{A(x)}.$$

*L'ensemble des solutions de (16) est la droite vectorielle de  $D^1(I, \mathbb{R})$  engendrée par  $\varphi_0$ . Autrement dit, c'est l'ensemble des fonctions  $\lambda\varphi_0$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Démonstration : La fonction  $\varphi_0$  est dérivable sur  $I$  et est solution de (16). Il en est donc de même des fonctions colinéaires à  $\varphi_0$ . Inversement, soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de (16). Pour tout  $x \in I$ , on a  $\varphi_0(x) \neq 0$ . Considérons la fonction

$$u = \frac{\varphi}{\varphi_0} : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Elle est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  on a

$$\varphi'(x) = u'(x)\varphi_0(x) + u(x)\varphi_0'(x).$$

Pour tout  $x \in I$  on a les égalités

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) = a(x)u(x)\varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \varphi_0'(x) = a(x)\varphi_0(x),$$

d'où il résulte que l'on a

$$u'(x)\varphi_0(x) = 0.$$

Puisque  $\varphi_0(x) \neq 0$ , la fonction  $u'$  est nulle sur  $I$ , donc  $u$  est constante sur  $I$ . Ainsi il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi = \lambda\varphi_0$ , d'où l'assertion.

**Remarque 12.3.** L'application de  $D^1(I, \mathbb{R})$  à valeurs dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur  $I$ , qui à  $y$  associe  $y' - ay$ , est linéaire et d'après la proposition précédente son noyau est de dimension 1 engendré par  $\varphi_0$ .

**Théorème 12.3.** Soit  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $\frac{b}{\varphi_0}$  sur  $I$ , où  $\varphi_0$  est définie par l'égalité (17). Soit  $\varphi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie sur  $I$  par l'égalité

$$\varphi_1 = u\varphi_0.$$

L'ensemble des solutions de (15) est formé des fonctions  $\varphi_1 + \lambda\varphi_0$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . C'est la droite affine de  $D^1(I, \mathbb{R})$  passant par  $\varphi_1$  et de direction la droite vectorielle engendrée par  $\varphi_0$ .

Démonstration : On vérifie directement que  $\varphi_1$  est une solution particulière de (15) et que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\varphi_1 + \lambda\varphi_0$  est une solution. Inversement, soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de (15). La fonction  $\varphi - \varphi_1$  est une solution de (16), donc est colinéaire à  $\varphi_0$ , d'où le résultat.

**Remarque 12.4 (Variation de la constante).** Voyons comment on a déterminé une solution particulière de (15). On utilise pour cela la méthode appelée, de variation de la constante, qui consiste à chercher une solution  $\varphi$  de (15) sous la forme  $u\varphi_0$ , où  $u$  est une fonction à déterminer. On obtient pour tout  $x \in I$

$$\varphi'(x) = u'(x)\varphi_0(x) + u(x)\varphi_0'(x) = u'(x)\varphi_0(x) + u(x)a(x)\varphi_0(x).$$

Puisque pour tout  $x \in I$ , on a  $\varphi'(x) = a(x)u(x)\varphi_0(x) + b(x)$ , on en déduit que

$$b(x) = u'(x)\varphi_0(x).$$

Par suite,  $u$  est une primitive de  $\frac{b}{\varphi_0}$  sur  $I$ .

### Remarques 12.5.

1) Soient  $(x_0, y_0)$  un élément de  $I \times \mathbb{R}$ . Il existe une unique solution  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (15) telle que  $\varphi(x_0) = y_0$ . Il s'agit de la fonction

$$\varphi = \varphi_1 + \lambda\varphi_0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{y_0 - \varphi_1(x_0)}{\varphi_0(x_0)}.$$

2) Si l'on connaît deux solutions distinctes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de (15) sur  $I$ , l'ensemble de ses solutions est formé des fonctions  $\lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

3) Si l'on connaît une solution particulière  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (15), l'ensemble de ses solutions, qui est une droite affine, est formé des fonctions  $v + \lambda\varphi_0$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Exemples 12.7.

1) Les solutions sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{x} + 1,$$

sont les fonctions  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(x) = x \operatorname{Log} x + \lambda x \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(18) \quad y' = y + x.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est formé des fonctions colinéaires à la fonction exponentielle. D'après le théorème 12.3, une solution particulière de (18) est la fonction  $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi_1(x) = u(x)e^x \quad \text{où} \quad u(x) = \int_0^x \frac{t dt}{e^t}.$$

En effectuant une intégration par parties on constate que l'on a

$$\varphi_1(x) = -x - 1 + e^x.$$

L'ensemble des solutions de (18) est donc formé des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = -x - 1 + ke^x \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution de (18) qui envoie 0 sur 1 est la fonction

$$\varphi(x) = 2e^x - x - 1.$$

3) Les solutions sur  $]0, +\infty[$  de l'équation

$$y' = \frac{y}{x} + x \operatorname{Arctg} x,$$

sont les fonctions  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(x) = x^2 \operatorname{Arctg} x - \frac{x \operatorname{Log}(1+x^2)}{2} + \lambda x \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 12.6.** Considérons l'équation sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$(19) \quad y' = |y|.$$

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de (19). Si pour tout  $x$  on a  $\varphi(x) > 0$ , on obtient  $\varphi'(x) = \varphi(x)$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\varphi(x) = \alpha e^x$ . Si pour tout  $x$  on a  $\varphi(x) < 0$ , on a dans ce cas  $\varphi'(x) = -\varphi(x)$ , d'où  $\varphi(x) = \beta e^{-x}$  avec  $\beta < 0$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(x_0) = 0$ . D'après la condition (19), pour tout  $x$  on a  $\varphi'(x) \geq 0$ . Par suite,  $\varphi$  est croissante sur  $[x_0, +\infty[$ , et  $\varphi$  est donc positive sur cet intervalle. Ainsi, il existe  $\lambda \geq 0$  tel que  $\varphi(x) = \lambda e^x$  pour tout  $x \geq x_0$ . Puisque  $\varphi(x_0) = 0$ , on a donc  $\lambda = 0$ , et  $\varphi$  est nulle sur  $[x_0, +\infty[$ . De même, on constate que  $\varphi$  est nulle sur  $] -\infty, x_0]$ , donc  $\varphi$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de (19) est donc formé des fonctions

$$\varphi(x) = \alpha e^x \quad \text{avec} \quad \alpha > 0, \quad \varphi(x) = \beta e^{-x} \quad \text{avec} \quad \beta < 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

Ce n'est pas un espace vectoriel, car par exemple la fonction qui à  $x$  associe  $e^x - e^{-x}$  n'est pas une solution. En particulier, (19) n'est pas une équation différentielle linéaire.

## 5. Fonctions complexes d'une variable réelle

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 12.3.** Soit  $a$  un point de  $I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si la fonction  $\Delta_a(f) : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par l'égalité

$$\Delta_a(f)(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite quand  $x$  tend vers  $a$  dans  $I - \{a\}$ . Dans ce cas, si  $\ell$  est cette limite, on dit que  $\ell$  est le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on note  $\ell = f'(a)$ .

Il existe des fonctions  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  uniques telles que pour tout  $x \in I$ , on ait

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x).$$

Elles s'appellent les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Lemme 12.1.** Soit  $a$  un point de  $I$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f_1$  et  $f_2$  le sont. Dans ce cas, on a

$$(20) \quad f'(a) = f'_1(a) + if'_2(a).$$

Démonstration : Pour tout  $x \in I$  autre que  $a$ , on a

$$\Delta_a(f)(x) = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} + i \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a},$$

Par suite, si  $f_1$  et  $f_2$  sont dérivables en  $a$ , il en est de même de  $f$  et l'on a l'égalité (20) (prop. 1.8). Inversement, il suffit de vérifier que si  $u$  et  $v$  sont des fonctions réelles définies sur une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  telles que  $a$  soit adhérent à  $X$  et que  $u + iv$  possède une limite  $\ell = \ell_1 + i\ell_2$  (avec  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ ) en  $a$ , alors  $u(x)$  et  $v(x)$  tendent respectivement vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$  quand  $x$  tend vers  $a$ . On remarque pour cela que l'on a

$$|(u + iv)(x) - \ell| = \sqrt{(u(x) - \ell_1)^2 + (v(x) - \ell_2)^2},$$

d'où les inégalités

$$|u(x) - \ell_1| \leq |(u + iv)(x) - \ell| \quad \text{et} \quad |v(x) - \ell_2| \leq |(u + iv)(x) - \ell|,$$

ce qui entraîne l'assertion.

Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ , on dispose de la fonction dérivée  $f' : I \rightarrow \mathbb{C}$  qui à  $x \in I$  associe  $f'(x)$ . Les règles de calcul des dérivées établies dans le paragraphe 1 du

chapitre VI se conservent dans ce cadre avec les mêmes démonstrations, mis à part celui relatif à la dérivée d'une fonction réciproque qui n'a pas de sens ici. On définit de même pour tout  $n \geq 1$  la fonction dérivée  $n$ -ième de  $f$ , quand elle existe, par les formules

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Si  $f^{(n)}$  existe on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ . On notera  $D^n(I, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions complexes  $n$  fois dérivables sur  $I$ . Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 12.8.** Soient  $a$  un nombre complexe et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$g(x) = e^{ax}.$$

Vérifions que pour tout  $n \geq 1$ ,  $g$  appartient à  $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$(21) \quad g^{(n)}(x) = a^n e^{ax}.$$

Posons  $a = a_1 + ib_1$  avec  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$g(x) = e^{a_1 x} e^{ib_1 x} = e^{a_1 x} (\cos b_1 x + i \sin b_1 x).$$

D'après le lemme 12.1,  $g$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et l'on obtient directement l'égalité (21) si  $n = 1$ . L'assertion s'en déduit alors par récurrence.

**Remarque 12.7.** Tous les énoncés relatifs aux fonctions réelles ne s'étendent pas aux fonctions complexes. Par exemple, le théorème de Rolle est faux en général pour les fonctions complexes d'une variable réelle. En effet, soit  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $g(x) = e^{ix}$ . Elle est dérivable sur  $[0, 2\pi]$  et l'on a  $g(0) = g(2\pi) = 1$ . Pour autant, d'après (21), pour tout  $x \in [0, 2\pi]$  on a  $g'(x) = ie^{ix}$  qui est non nul.

On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  définie et dérivable sur  $I$  telle que  $g' = f$ . Étant donné un intervalle  $[a, b]$  contenu dans  $I$ , on dit que  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, b]$  si et seulement si ses fonctions coordonnées  $f_1$  et  $f_2$  dans la base  $(1, i)$  le sont. Dans ce cas, l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est par définition

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2.$$

Comme conséquence des théorèmes 7.8 et 7.9, on a l'énoncé suivant :

**Théorème 12.4.** Supposons  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  définie et continue sur  $[a, b]$ . Alors,  $f$  possède une primitive  $F$  sur  $[a, b]$ , et on a l'égalité

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

En ce qui concerne la théorie des équations différentielles linéaires, les définitions et les résultats établis dans le paragraphe 4 s'étendent sans modifications. En particulier, si  $a, b : I \rightarrow \mathbb{C}$  sont des fonction continues sur  $I$ , on peut considérer l'équation linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x),$$

dont le principe de résolution est le même que celui de l'équation (15). L'énoncé du théorème 12.3 reste valable en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$  avec la même démonstration. En particulier, l'ensemble des solutions de cette équation est une droite affine de  $D^1(I, \mathbb{C})$ .

**Exemple 12.9.** Considérons sur  $\mathbb{R}$  l'équation

$$(22) \quad y' = iy + \cos x.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée  $y' = iy$  est formée des fonctions  $\lambda\varphi_0$  où  $\varphi_0(x) = e^{ix}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Par ailleurs, une solution particulière de (22) est  $u\varphi_0$  où  $u$  est une primitive de la fonction qui à  $x \in \mathbb{R}$  associe  $e^{-ix} \cos x$ . On est donc amené à déterminer une primitive  $u$  de la fonction  $x \mapsto \cos^2 x - i \sin x \cos x$ . On peut prendre

$$u(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + i \frac{\cos 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{i}{4} e^{-2ix}.$$

L'ensemble des solutions de (22) est donc constitué des fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme

$$\varphi(x) = e^{ix} \left( \lambda + \frac{x}{2} \right) + \frac{i}{4} e^{-ix} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

## 6. Équations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Soient  $a$  et  $b$  des nombres complexes. Une équation différentielle de la forme

$$(23) \quad y'' + ay' + by = 0,$$

s'appelle une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. On appelle solution de (23), toute fonction  $\varphi \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait

$$\varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = 0.$$

Le polynôme

$$P = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$$

s'appelle le polynôme caractéristique de l'équation (23).

**Théorème 12.5.** *L'ensemble des solutions de (23) est un plan vectoriel de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .*

1) Si  $\alpha = \beta$ , une base de ce plan est  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = xe^{\alpha x}.$$

2) Si  $\alpha \neq \beta$ , une base de ce plan est  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = e^{\beta x}.$$

Démonstration : Soient  $S$  l'ensemble des solutions de (23) et  $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Prouvons le lemme suivant :

**Lemme 12.2.** *L'application  $\Delta : D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  définie par l'égalité*

$$\Delta(g) = g'' + ag' + bg,$$

*est linéaire de noyau  $S$ . Pour tous  $\gamma \in \mathbb{C}$  et  $h \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , en notant  $t_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $t_\gamma(x) = e^{\gamma x}$ , on a*

$$(24) \quad \Delta(t_\gamma h) = t_\gamma(P(\gamma)h + P'(\gamma)h' + h'').$$

Démonstration : Le fait que  $\Delta$  soit linéaire résulte des règles de dérivation. Par définition, son noyau est  $S$ . On vérifie alors directement (24) en utilisant l'égalité  $t'_\gamma = \gamma t_\gamma$ .

Soit  $g$  une solution de (23). Considérons la fonction  $h \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  définie par

$$h(x) = \frac{g(x)}{e^{\alpha x}}.$$

On a  $\Delta(g) = 0$ . D'après (24), vu que  $t_\alpha$  est partout non nulle, et que  $P(\alpha) = 0$ , on obtient

$$(25) \quad P'(\alpha)h'(x) + h''(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1) Si  $\alpha$  est racine double de  $P$ , on a  $P'(\alpha) = 0$ , d'où  $h'' = 0$ . Il existe donc  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{C}$  tels que l'on ait

$$h(x) = u + vx.$$

On obtient

$$g(x) = ue^{\alpha x} + vxe^{\alpha x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par suite,  $g$  appartient au sous-espace vectoriel de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  engendré par les fonctions  $x \mapsto e^{\alpha x}$  et  $x \mapsto xe^{\alpha x}$ . Il est de dimension 2 car ces deux fonctions forment un système libre. En effet, si  $r$  et  $s$  sont des nombres complexes tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait

$$re^{\alpha x} + sxe^{\alpha x} = 0,$$

avec  $x = 0$  on obtient  $r = 0$ , puis  $s = 0$ . Par ailleurs, sous l'hypothèse faite, on vérifie que toute fonction de ce plan est solution de (23). Cela établit la première assertion.

2) Supposons  $\alpha \neq \beta$ . On a

$$P'(\alpha) = 2\alpha + a = \alpha - \beta.$$

D'après (25), on a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'égalité

$$(\alpha - \beta)h'(x) + h''(x) = 0.$$

Il existe ainsi  $u \in \mathbb{C}$  tel que l'on ait

$$h'(x) = ue^{(\beta-\alpha)x},$$

d'où l'existence de  $v \in \mathbb{C}$  tel que

$$h(x) = \frac{u}{\beta - \alpha} e^{(\beta-\alpha)x} + v.$$

On obtient

$$g(x) = \frac{u}{\beta - \alpha} e^{\beta x} + ve^{\alpha x}.$$

La fonction  $g$  appartient donc au sous-espace vectoriel de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  engendré par les fonctions  $x \mapsto e^{\alpha x}$  et  $x \mapsto e^{\beta x}$ . Inversement, toute fonction de ce plan est solution de (23). Il reste à vérifier que ces deux fonctions sont indépendantes. Soient  $r$  et  $s$  des nombres complexes tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait

$$re^{\alpha x} + se^{\beta x} = 0.$$

Avec  $x = 0$ , on obtient  $r + s = 0$ . En dérivant cette égalité, on déduit avec  $x = 0$  que l'on a  $\alpha r + \beta s = 0$ . Le fait que  $\alpha$  et  $\beta$  soient distincts entraîne alors  $r = s = 0$ , d'où le résultat.

**Exemple 12.10.** Considérons l'équation

$$y'' - (2 + i)y' + (1 + i)y = 0.$$

Son polynôme caractéristique est  $X^2 - (2 + i)X + (1 + i)$ , dont les racines sont 1 et  $1 + i$ . L'ensemble de ses solutions est donc formé des fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$\varphi(x) = \lambda e^{(1+i)x} + \mu e^x \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

On constate qu'il existe une infinité de solutions qui s'annulent en 0, à savoir celles de la forme

$$\varphi(x) = \lambda(e^{(1+i)x} - e^x) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}.$$



Cela étant, il y a une unique solution  $\varphi$  vérifiant par exemple les conditions initiales  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi'(0) = 1$ , à savoir la fonction

$$\varphi(x) = i(e^x - e^{(1+i)x}).$$

Supposons que  $a$  et  $b$  soient des nombres réels. Comme conséquence du théorème précédent, on va décrire les solutions à valeurs réelles de l'équation (23), autrement dit les fonctions  $\varphi \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $\varphi'' + a\varphi' + b\varphi = 0$ .

**Théorème 12.6.** *Supposons  $a$  et  $b$  réels. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (23) est un plan vectoriel de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .*

1) Si  $P$  a une racine double  $\alpha \in \mathbb{R}$ , une base de ce plan est  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = xe^{\alpha x}.$$

2) Si  $P$  a deux racines distinctes  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ , une base de ce plan est  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = e^{\beta x}.$$

3) Supposons que  $P$  n'ait pas de racines réelles. Soient  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  ses deux racines complexes conjuguées. Posons  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Une base de ce plan est  $(\varphi_1, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x.$$

Démonstration : Les deux premières assertions s'obtiennent en recopiant la démonstration du théorème 12.5. Vérifions l'assertion 3. Soit  $g \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une solution de (23). C'est en particulier une solution de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . D'après le théorème 2.5, il existe donc  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{C}$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait

$$g(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\bar{\lambda}x}.$$

La fonction  $g$  étant à valeurs réelles, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a aussi

$$g(x) = \bar{u}e^{\bar{\lambda}x} + \bar{v}e^{\lambda x}.$$

Puisque les fonctions  $x \mapsto e^{\lambda x}$  et  $x \mapsto e^{\bar{\lambda}x}$  sont  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendantes, on en déduit que  $\bar{u} = v$ . Par suite, on a

$$g(x) = ue^{\lambda x} + \bar{u}e^{\bar{\lambda}x} = 2 \operatorname{Re}(ue^{\lambda x}).$$

Posons  $u = u_1 + iu_2$  où  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\operatorname{Re}(ue^{\lambda x}) = e^{\lambda_1 x} (u_1 \cos \lambda_2 x - u_2 \sin \lambda_2 x).$$

Cela prouve que  $g$  appartient au sous-espace vectoriel de  $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Inversement, on vérifie directement que toute fonction de ce sous-espace est une solution de (23). Il reste à démontrer que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendantes. Soient  $r$  et  $s$  sont des nombres réels tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on ait

$$re^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + se^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x = 0.$$

Avec  $x = 0$ , on obtient  $r = 0$ , puis  $s = 0$ , d'où le résultat.

### Exemples 12.11.

1) Considérons l'équation

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Son polynôme caractéristique possède  $-1$  comme racine double. L'ensemble de ses solutions est donc formé des fonctions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\varphi(x) = \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2) Considérons l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Son polynôme caractéristique possède  $1 + i$  et  $1 - i$  comme racines. L'ensemble de ses solutions  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est donc formé des fonctions

$$\varphi(x) = e^x (\lambda \cos x + \mu \sin x) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## 7. Résolution avec second membre

Soient  $a$  et  $b$  des nombres complexes,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction complexe définie et continue sur  $I$ . On considère ici l'équation différentielle linéaire du second ordre « avec second membre »

$$(26) \quad y'' + ay' + by = f(x).$$

Une solution de (26) est une fonction  $\varphi \in D^2(I, \mathbb{C})$  telle que  $\varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = f(x)$ . Son équation homogène associée est

$$y'' + ay' + by = 0.$$

**Théorème 12.7.** *L'ensemble des solutions de (26) est un plan affine de  $D^2(I, \mathbb{C})$ , de direction le plan vectoriel formé des solutions restreintes à  $I$  de son équation homogène associée.*

Démonstration : Il suffit de prouver l'existence d'une solution particulière de (26). Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine du polynôme  $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ . Cherchons une solution  $g \in D^2(I, \mathbb{C})$  sous la forme

$$(27) \quad g(x) = u(x)e^{\alpha x},$$

où  $u$  est une fonction à déterminer. D'après le lemme 12.2, avec ses notations, on a

$$\Delta(t_\alpha u) = t_\alpha(P'(\alpha)u' + u'') = f.$$

Autrement dit, pour tout  $x \in I$  on a

$$P'(\alpha)u'(x) + u''(x) = \frac{f(x)}{e^{\alpha x}}.$$

Puisque  $f$  est continue sur  $I$ , il en est de même de la fonction  $\frac{f(x)}{e^{\alpha x}}$ . En posant

$$v = u',$$

on constate que  $v$  est solution de l'équation linéaire du premier ordre, de la forme (15),

$$(28) \quad y' = -P'(\alpha)y + \frac{f(x)}{e^{\alpha x}}.$$

On a vu qu'une telle équation possède des solutions dans  $D^1(I, \mathbb{C})$ . Ainsi  $u$  doit être une primitive sur  $I$  d'une solution de (28). On vérifie alors que si  $u$  est une telle fonction, alors la fonction  $g$  définie par (27) est une solution de (26), d'où le résultat.

**Corollaire 12.3.** *Supposons  $a$  et  $b$  réels et que  $f$  soit à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des solutions réelles de (26) est un plan affine de  $D^2(I, \mathbb{R})$ , de direction le plan vectoriel formé des solutions restreintes à  $I$  de son équation homogène associée.*

Démonstration : Comme précédemment, il suffit de prouver l'existence d'une solution particulière réelle. D'après le théorème 12.7, il existe  $g \in D^2(I, \mathbb{C})$  solution de (26). Si  $g_1$  et  $g_2$  sont les fonctions coordonnées de  $g$  dans la base  $(1, i)$ , on obtient l'égalité

$$g_1''(x) + ag_1'(x) + bg_1(x) + i(g_2''(x) + ag_2'(x) + bg_2(x)) = f(x).$$

Puisque  $f$  est à valeurs réelles, on a donc

$$g_1''(x) + ag_1'(x) + bg_1(x) = f(x),$$

et  $g_1$  est une solution réelle de (26), d'où l'assertion.

**Exemple 12.12.** Déterminons les solutions réelles de l'équation

$$(29) \quad y'' + y = \operatorname{ch} x \quad \text{où} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

D'après le théorème 12.6, une base de l'ensemble des solutions de l'équation  $y'' + y = 0$  est  $(\cos x, \sin x)$ . Il reste à trouver une solution particulière. En suivant la méthode de la

démonstration du théorème 12.7, il s'agit d'abord de déterminer une solution particulière  $v$  de l'équation (cf. (28))

$$y' = -2iy + \frac{\operatorname{ch} x}{e^{ix}}.$$

On trouve que l'on peut prendre

$$v(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{(1-i)x}}{1+i} + \frac{e^{-(1+i)x}}{i-1} \right).$$

Une primitive de cette fonction est

$$u(x) = \frac{e^{-ix} \operatorname{ch} x}{2}.$$

Compte tenu de (27), la fonction

$$g(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{2}$$

est donc solution de (29), ce qui est par ailleurs immédiat à vérifier. Par suite, l'ensemble des solutions de (29) est constitué des fonctions de la forme

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{2} + \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 12.8 (Variation des constantes).** On peut aussi rechercher une solution particulière de l'équation (26) en utilisant la méthode de variation des constantes. Soit  $(y_1, y_2)$  une base de l'espace vectoriel formé des solutions de l'équation homogène associée. On cherche une solution particulière  $\varphi$  de (26) sous la forme

$$(30) \quad \varphi = uy_1 + vy_2,$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions à déterminer. Afin de simplifier les calculs, on impose à  $u$  et  $v$  de vérifier certaines conditions compatibles avec l'équation considérée. Par exemple, on peut imposer à  $u$  et  $v$  de satisfaire la condition supplémentaire

$$(31) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0.$$

En écrivant que l'on a  $\varphi'' + a\varphi' + b\varphi = f$ , on vérifie alors directement que l'on a

$$(32) \quad u'y'_1 + v'y'_2 = f.$$

On obtient ainsi avec les conditions (31) et (32) un système linéaire permettant d'obtenir  $u'$  et  $v'$ , pourvu que pour tout  $x \in I$  on ait  $y'_2 y_1(x) \neq y'_1 y_2(x)$ . Il reste ensuite à déterminer une primitive de  $u'$  et de  $v'$  pour expliciter une solution de (26).

**Exemple 12.13.** Déterminons l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$(33) \quad y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée est engendré par les fonctions  $(e^x, e^{2x})$ . En suivant la méthode indiquée dans la remarque précédente, les fonctions  $u$  et  $v$  à déterminer vérifient pour tout  $x \in \mathbb{R}$  les égalités

$$u'(x) + v'(x)e^x = 0 \quad \text{et} \quad u'(x) + 2v'(x)e^x = 1.$$

On obtient

$$u'(x) = -1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x}.$$

On peut prendre  $u = -x$  et  $v = -e^{-x}$ , ce qui conduit à

$$\varphi(x) = -(x+1)e^x,$$

comme solution particulière de (33). L'ensemble des solutions cherché est donc formé des fonctions

$$y(x) = (\lambda - x)e^x + \mu e^{2x} \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## 8. Cas d'une fonction exponentielle polynôme

Soient  $a$  et  $b$  des nombres complexes. On se préoccupe ici de l'étude de l'équation

$$(34) \quad y'' + ay' + by = e^{\alpha x} Q(x),$$

où  $\alpha$  est un nombre complexe et  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ . Le second membre de (34) s'appelle une fonction exponentielle polynôme. Il existe une méthode d'identification polynomiale permettant d'obtenir de façon simple une solution particulière de (34). Notons

$$P = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$$

le polynôme caractéristique de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ .

**Théorème 12.8.** *L'équation (34) possède une solution  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme*

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} H(x),$$

où  $H \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme vérifiant les conditions suivantes :

- 1) si  $\alpha$  n'est pas racine de  $P$ , on a  $\deg H = \deg Q$ .
- 2) Si  $\alpha$  est racine simple de  $P$ , on a  $\deg H = \deg Q + 1$ .
- 3) Si  $\alpha$  est racine double de  $P$ , on a  $\deg H = \deg Q + 2$ .

**Remarque 12.9.** Si  $\alpha$  n'est pas racine de  $P$ , on va en fait démontrer qu'il existe un unique polynôme  $H \in \mathbb{C}[X]$ , de degré celui de  $Q$ , tel que la fonction  $x \mapsto e^{\alpha x} H(x)$  soit solution de (34). Il n'y a pas unicité de  $H$  dans les autres cas.

Étant donné  $F \in \mathbb{C}[X]$ , on notera abusivement dans ce qui suit  $e^{\alpha x} F(x)$  la fonction  $x \mapsto e^{\alpha x} F(x)$ .

Démonstration : On peut supposer  $Q$  non nul. Notons  $E_\alpha$  l'ensemble des fonctions complexes définies sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $e^{\alpha x} F(x)$  où  $F$  appartient à  $\mathbb{C}[X]$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel isomorphe à  $\mathbb{C}[X]$ . Considérons l'application  $\Delta : E_\alpha \rightarrow E_\alpha$  définie par

$$\Delta(g) = g'' + ag' + bg.$$

Elle est  $\mathbb{C}$ -linéaire, et d'après le lemme 12.2, pour tout  $F \in \mathbb{C}[X]$  on a

$$(35) \quad \Delta(e^{\alpha x} F(x)) = e^{\alpha x} \left( P(\alpha) F(x) + P'(\alpha) F'(x) + F''(x) \right).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $E_{\alpha,n}$  le sous-espace vectoriel de  $E_\alpha$  formé des fonctions  $e^{\alpha x} F(x)$  où  $F \in \mathbb{C}[X]$  vérifie  $\deg F \leq n$ . Le système

$$(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^n e^{\alpha x})$$

est une base de  $E_{\alpha,n}$ , donc  $E_{\alpha,n}$  est de dimension  $n + 1$ . Par ailleurs,  $\Delta$  induit un endomorphisme de  $E_{\alpha,n}$ . Soit  $M$  la matrice de  $\Delta$  dans la base  $(e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^n e^{\alpha x})$ . C'est une matrice de taille  $(n + 1, n + 1)$ . Notons  $M_{i,j}$  le coefficient de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de  $M$ . D'après (35), pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a

$$\Delta(x^k e^{\alpha x}) = P(\alpha) x^k e^{\alpha x} + k P'(\alpha) x^{k-1} e^{\alpha x} + k(k-1) x^{k-2} e^{\alpha x}.$$

Par suite,  $M$  est une matrice triangulaire supérieure, on a

$$M_{1,1} = P(\alpha), \quad M_{1,2} = P'(\alpha), \quad M_{2,2} = P(\alpha),$$

et pour tout  $j \geq 3$ , on obtient les égalités

$$M_{j,j} = P(\alpha), \quad M_{j-1,j} = (j-1)P'(\alpha), \quad M_{j-2,j} = (j-1)(j-2).$$

Les autres coefficients de  $M$  sont nuls.

1) Si l'on a  $P(\alpha) \neq 0$ , la matrice  $M$ , qui est de déterminant  $P(\alpha)^n$ , est inversible, autrement dit  $\Delta$  est un automorphisme de  $E_{\alpha,n}$ . En prenant pour  $n$  le degré de  $Q$ , on en déduit l'existence d'un unique polynôme  $H \in \mathbb{C}[X]$ , de degré au plus  $\deg Q$ , tel que l'on ait

$$\Delta(e^{\alpha x} H(x)) = e^{\alpha x} Q(x).$$

D'après (35), on obtient

$$P(\alpha)H + P'(\alpha)H' + H'' = Q,$$

d'où  $\deg H = \deg Q$  et la première assertion.

2) Si  $\alpha$  est racine simple de  $P$ , on a  $P'(\alpha) \neq 0$ , par suite  $M$  est de rang  $n$ . L'image de  $E_{\alpha,n}$  par  $\Delta$  étant contenue dans  $E_{\alpha,n-1}$ , qui est de dimension  $n$ , on a donc

$$\Delta(E_{\alpha,n}) = E_{\alpha,n-1}.$$

On utilise cette égalité avec  $n = \deg Q + 1$ . Il existe ainsi  $H \in \mathbb{C}[X]$  de degré au plus  $\deg Q + 1$  tel que  $\Delta(e^{\alpha x} H(x)) = e^{\alpha x} Q(x)$ . Compte tenu de l'égalité

$$P'(\alpha)H' + H'' = Q,$$

on a  $\deg H = \deg Q + 1$ .

3) Si  $\alpha$  est racine double de  $P$ , on a  $P'(\alpha) = 0$ , donc  $M$  est de rang  $n - 1$ . Dans ce cas, l'image de  $\Delta$  est de dimension  $n - 1$ , et l'on a

$$\Delta(E_{\alpha,n}) = E_{\alpha,n-2}.$$

La dernière assertion en résulte avec  $n = \deg Q + 2$ , d'où le résultat.

**Exemple 12.14.** Déterminons les solutions réelles de l'équation

$$(36) \quad y'' - 2y' + 2y = xe^{-x} \sin x.$$

On explicite pour cela les solutions complexes de l'équation

$$(37) \quad y'' - 2y' + 2y = ixe^{-(1+i)x},$$

ce qui permettra d'obtenir les solutions réelles de (36) en prenant les parties réelles des solutions de (37).

Le polynôme caractéristique de (37) est  $P = X^2 - 2X + 2$ , dont les racines sont  $1 + i$  et  $1 - i$ . Cherchons une solution particulière de (37). On utilise pour cela le théorème 12.8 avec  $\alpha = -(1 + i)$  qui n'est pas racine de  $P$ . Il existe ainsi  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{C}$  tels que la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-(1+i)x},$$

soit solution de (37). D'après (35) on a

$$\Delta(\varphi(x)) = e^{-(1+i)x} \left( P(-1-i)(ax + b) + aP'(-1-i) \right),$$

d'où l'égalité polynomiale

$$P(-1-i)(ax+b) + aP'(-1-i) = ix.$$

On obtient

$$a = \frac{1+i}{8} \quad \text{et} \quad b = \frac{2+i}{16}.$$

On en déduit que la fonction

$$y_0(x) = e^{-x} \left( \frac{(x+1)\cos x}{8} + \frac{(2x+1)\sin x}{16} \right)$$

est une solution particulière de (36). L'ensemble des solutions de (36) est donc constitué des fonctions de la forme

$$y_0(x) + e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x) \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## 9. Équations de Ricatti

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$(38) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

où  $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Elles sont de la forme  $y' = f(x, y)$ , où  $f$  est une fonction définie et continue sur l'ouvert  $U = I \times \mathbb{R}$ . Son application dérivée partielle par rapport à  $y$  existe et est continue sur  $U$ . Par suite, le théorème de Cauchy s'applique à une telle équation (th. 12.2). Autrement dit, si  $(x_0, y_0)$  est un point de  $U$ , il existe une unique solution maximale  $\varphi$  de (38) telle que  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Voyons comment résoudre cette équation dans le cas où l'on connaît une solution particulière  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\varphi$  une solution de (38) autre que  $\varphi_0$ . Posons

$$\varphi = \varphi_0 + z.$$

On obtient l'égalité

$$(39) \quad z' = (2a(x)\varphi_0(x) + b(x))z + a(x)z^2.$$

La fonction nulle est solution de (39) et  $z$  n'est pas la fonction nulle. Compte tenu du caractère d'unicité du théorème de Cauchy, et du fait que  $z$  se prolonge en une solution maximale,  $z$  est partout non nulle sur son domaine de définition. On peut donc poser

$$u = \frac{1}{z}.$$



La fonction  $u$  vérifie l'équation linéaire

$$(40) \quad u' + (2a(x)\varphi_0(x) + b(x))u + a(x) = 0.$$

Il en résulte que l'ensemble des solutions de (38) est constitué de la fonction  $\varphi_0$ , et des fonctions  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{u(x)},$$

où  $J$  est un intervalle contenu dans  $I$  et  $u : J \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (40) partout non nulle sur  $J$ .

**Exemple 12.15.** Considérons l'équation

$$(41) \quad y' = -y^2 + (1 + 2x)y + (1 - x - x^2).$$

Vérifions que l'ensemble de ses solutions est constitué de l'identité de  $\mathbb{R}$ , ainsi que des fonctions  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{\lambda e^{-x} + 1} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R},$$

où  $I$  est un intervalle tel que pour tout  $x \in I$  on ait  $\lambda e^{-x} + 1 \neq 0$ .

On remarque d'abord que la fonction  $\varphi_0(x) = x$  est une solution particulière de (41). Soit  $\varphi$  une solution de (41) distincte de  $\varphi_0$ . Posons

$$z = \varphi - \varphi_0.$$

On a

$$z' - z + z^2 = 0.$$

Comme précédemment,  $z$  est partout non nulle là où elle est définie. Posons

$$u = \frac{1}{z}.$$

On obtient

$$u' + u = 1.$$

Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $u(x) = \lambda e^{-x} + 1$ , ce qui entraîne l'assertion.