

## Correction du deuxième Devoir

### Exercice 1

1) L'implication (i)  $\implies$  (ii) est immédiate. Par ailleurs, si  $\mathfrak{M}$  est principal engendré par un élément  $a$  de  $A$ , la classe de  $a$  modulo  $\mathfrak{M}^2$  engendre le  $k$ -espace vectoriel  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ , et ainsi la condition (iii) est satisfaite.

Démontrons l'implication (iii)  $\implies$  (i). On distingue les deux cas suivants :

a) Supposons que la dimension sur  $k$  de  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  soit nulle. Dans ce cas, on a  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ . Puisque  $A$  est un anneau artinien, il est noethérien et en particulier  $\mathfrak{M}$  est un  $A$ -module de type fini. D'après le lemme de Nakayama, cela entraîne  $\mathfrak{M} = 0$ . Par suite,  $A$  est un corps, et la condition (i) est réalisée.

b) Supposons que la dimension sur  $k$  de  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  soit égale à 1. Soit  $\{x + \mathfrak{M}^2\}$  une  $k$ -base de  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  ; d'après le lemme de Nakayama,  $\mathfrak{M}$  est engendré par  $x$ . Considérons alors un idéal  $I$  de  $A$  non nul et distinct de  $A$ . Soit  $N$  le nilradical de  $A$ . Puisque tous les idéaux premiers de  $A$  sont maximaux ( $A$  est artinien) et que  $A$  est local, on a  $\mathfrak{M} = N$ . On déduit de là que  $\mathfrak{M}$  est idéal nilpotent (*loc. cit.*). Puisque  $I$  est non nul et est contenu dans  $\mathfrak{M}$  (car  $I \neq A$ ), il existe donc un entier  $n \geq 1$  tel que  $I$  soit contenu dans  $\mathfrak{M}^n$  sans être contenu dans  $\mathfrak{M}^{n+1}$ . Vérifions alors que l'on a  $I = \mathfrak{M}^n$ , ce qui prouvera que  $I$  est principal engendré par  $x^n$ , puis l'implication. On considère pour cela un élément  $y$  qui est dans  $\mathfrak{M}^n$  sans être dans  $\mathfrak{M}^{n+1}$ , et un élément  $u$  de  $A$  tel que  $y = ux^n$ . Le fait que  $u$  n'appartienne pas à  $\mathfrak{M}$  entraîne que  $u$  est une unité de  $A$ . Il en résulte que  $x^n$  appartient à  $I$  et donc que  $\mathfrak{M}^n$  est contenu dans  $I$  ; d'où l'égalité annoncée et le résultat.

2) Soient  $A$  un anneau principal,  $p$  un élément irréductible de  $A$  et  $n$  un entier au moins égal à 1. Alors, l'anneau  $A/(p^n)$  satisfait aux conditions souhaitées. En effet,  $A$  est noethérien, et  $A$  possède un unique idéal premier  $\mathfrak{M}$  qui est  $(p)/(p^n)$ , de sorte que  $A$  est de dimension 0. Cela montre que  $A$  est un anneau artinien local, d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$  qui est principal.

3) L'anneau  $K[X^2, X^3]$  est noethérien : il est isomorphe à  $K[U, V]/(V^2 - U^3)$  via l'application, passée au quotient,  $K[U, V] \rightarrow K[X^2, X^3]$  qui à  $P(U, V)$  associe  $P(X^2, X^3)$ . Il en résulte que  $A$  est noethérien. Par ailleurs,

$$\mathfrak{M} = (X^2, X^3)/(X^4),$$

est un idéal maximal de  $A$ , car si l'on identifie  $K$  à un sous-corps de  $A$ , l'application  $u$  de  $K$  sur  $A/\mathfrak{M}$  définie par  $u(\lambda) = \lambda + \mathfrak{M}$  est un isomorphisme de corps de  $K$  sur  $A/\mathfrak{M}$ . L'idéal  $\mathfrak{M}$  est le seul idéal premier de  $A$ . En effet, soit  $\mathfrak{P}$  un idéal premier de  $A$  ; on a  $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}/(X^4)$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $K[X^2, X^3]$  qui contient  $(X^4)$ . L'élément  $X^2$  est dans  $\mathfrak{p}$ , donc  $X^6$  est aussi dans  $\mathfrak{p}$  et par suite  $X^3$  est dans  $\mathfrak{p}$ . On déduit de là que  $\mathfrak{M}$  est contenu dans  $\mathfrak{P}$ . Puisque  $\mathfrak{M}$  est un idéal maximal de  $A$ , on a donc  $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}$ . Ainsi,  $A$  est un anneau artinien local d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$ .

Vérifions que la dimension sur  $A/\mathfrak{M}$  de  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  est égale à 2, ce qui prouvera le résultat. On utilise pour cela la remarque suivante :

**Remarque.** Soient  $K$  et  $L$  deux corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $F$  un  $L$ -espace vectoriel. Soient  $u$  un isomorphisme de  $K$  sur  $L$ , et  $\varphi$  un isomorphisme de groupes de  $E$  sur  $F$  tel que, pour tout  $\lambda \in K$  et  $x \in E$ , l'on ait  $\varphi(\lambda x) = u(\lambda)\varphi(x)$ . Alors,  $E$  est de dimension finie sur  $K$  si et seulement si  $F$  est de dimension finie sur  $L$ , et si tel est le cas, ces deux dimensions sont égales.

On a  $\mathfrak{M}^2 = 0$ . La remarque utilisée avec  $E = F = \mathfrak{M}$ ,  $\varphi$  l'application identité de  $\mathfrak{M}$ , et  $u$  l'application définie ci-dessus, entraîne que la dimension cherchée est égale à la dimension du  $K$ -espace vectoriel  $\mathfrak{M}$ . Notre assertion résulte alors du fait que  $(X^2 + (X^4), X^3 + (X^4))$  est une  $K$ -base de  $\mathfrak{M}$ .

## Exercice 2

1) Soit  $I$  un élément de  $\text{Id}(A)$ . Il existe un élément non nul  $d$  de  $A$  tel que  $dI$  soit contenu dans  $A$ . Les  $A$ -modules  $I$  et  $dI$  étant isomorphes via  $x \mapsto dx$ , on peut supposer pour démontrer l'assertion que  $I$  est contenu dans  $A$ . On considère pour cela un élément  $a$  non nul de  $I$ . Pour tout élément  $\lambda$  de  $I$ ,  $f$  étant un homomorphisme de  $A$ -modules, on a les égalités  $f(a\lambda) = af(\lambda) = \lambda f(a)$ , d'où  $f(\lambda) = \lambda(f(a)/a)$ , et le résultat.

2) Il existe un  $A$ -module libre  $F$  et un homomorphisme de  $A$ -modules  $\varphi : F \rightarrow I$  surjectif de  $F$  sur  $I$ . Puisque  $I$  est projectif, il existe un homomorphisme de  $A$ -modules  $\psi : I \rightarrow F$  tel que  $\varphi \circ \psi = \text{Id}_I$ . Soient  $(e_i)_{i \in T}$  une  $A$ -base de  $F$  indexée par une ensemble  $T$ , et  $(e_i^*)_{i \in T}$  la base duale qui lui est associée : on a  $e_i^*(e_j) = 1$  si  $i = j$  et est nul si  $i \neq j$ . Pour tout  $i$  dans  $T$ , notons  $\lambda_i : I \rightarrow A$  l'homomorphisme de  $A$ -modules défini pour tout  $x \in I$  par l'égalité

$$\lambda_i(x) = e_i^*(\psi(x)).$$

D'après l'assertion 1), il existe un élément  $b_i$  de  $K$  tel que, pour tout  $x \in I$ , l'on ait  $\lambda_i(x) = xb_i$ . Étant donné un élément  $x$  non nul de  $I$ , il n'existe qu'un nombre fini d'indices  $i \in T$  tels que  $e_i^*(\psi(x)) \neq 0$ . Autrement dit, il n'existe qu'un nombre fini d'indices  $i \in T$  tels que  $b_i \neq 0$  : notons  $b_1, \dots, b_n$  ces éléments. On pose alors

$$J = \sum_{i=1}^n Ab_i.$$

Vérifions que l'on  $IJ = A$ , ce qui prouvera que  $I$  est inversible. Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , posons  $a_i = \varphi(e_i)$ . On a

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i = 1.$$

En effet, soit  $x$  un élément non nul de  $I$ . On a les égalités

$$x = \varphi \circ \psi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i x,$$

ce qui implique (1). Par ailleurs, pour tout  $i$ ,  $b_i I$  est contenu dans  $A$ , de sorte que  $IJ$  est un idéal de  $A$ . L'égalité (1) entraîne alors notre assertion. D'où le résultat.

### Exercice 3

1) Soit  $s : N \rightarrow N/f(M)$  la surjection canonique de  $N$  sur  $f(M)$ . Le noyau de l'homomorphisme de  $A$ -modules  $s \otimes \text{Id}_k : N \otimes_A k \rightarrow N/f(M) \otimes_A k$ , contient l'image de  $f \otimes \text{Id}_k$ , qui d'après l'hypothèse faite est  $N \otimes_A k$ . Puisque  $s \otimes \text{Id}_k$  est surjective on déduit de là que  $N/f(M) \otimes_A k = 0$ . Les  $A$ -modules  $k$  et  $N/f(M)$  étant de type fini sur  $A$ , et  $A$  étant un anneau local, on a  $N/f(M) = 0$  (cf. le rappel), i.e.  $f$  est surjective.

2) Démontrons que  $f$  est injective. Puisque  $N$  est par hypothèse libre sur  $A$  le noyau de  $f$  est facteur direct de  $M$  ; autrement dit, il existe un sous-module  $T$  de  $M$ , qui est isomorphe à  $N$  via  $f$ , tel que l'on ait  $M = \text{Ker } f \oplus T$ . On déduit de là un isomorphisme de  $A$ -modules  $\varphi$  de  $M \otimes_A k$  sur  $(\text{Ker } f \otimes_A k) \oplus (N \otimes_A k)$ , qui est défini par l'égalité

$$\varphi(m \otimes_A \lambda) = (m_1 \otimes_A \lambda, f(m_2) \otimes_A \lambda),$$

où l'on a  $m = m_1 + m_2$ , avec  $m_1 \in \text{Ker } f$  et  $m_2 \in T$ . Considérons alors l'homomorphisme  $p_2 : (\text{Ker } f \otimes_A k) \oplus (N \otimes_A k) \rightarrow N \otimes_A k$  défini par la deuxième projection. On a l'égalité  $f \otimes \text{Id}_k = p_2 \circ \varphi$ . Puisque  $f \otimes \text{Id}_k$  est injective, on a ainsi  $\text{Ker } f \otimes_A k = 0$ . L'anneau  $A$  étant noethérien et  $M$  étant de type fini sur  $A$ , le noyau de  $f$  est aussi de type fini sur  $A$ . Il en résulte que  $\text{Ker } f = 0$  (cf. *loc. cit.*). D'où le résultat.

### Exercice 4

Pour tout entier  $k \geq 1$ , désignons par  $2^{1/k}$  la racine réelle positive du polynôme  $X^k - 2$ . C'est un élément de  $A$ . Étant donné un entier  $n \geq 1$ , soit  $I_n$  l'idéal de  $A$  engendré par les éléments de la forme  $2^{1/k}$ , où  $k$  est un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ . La suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  forme une suite strictement croissante d'idéaux de  $A$ , i.e.  $A$  n'est pas noethérien. En effet, supposons qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $I_{n+1} = I_n$ . Dans ce cas, il existe des éléments  $a_k$  de  $A$  tels que l'on ait

$$2^{1/(n+1)} = \sum_{k=1}^n a_k 2^{1/k}.$$

On déduit de là l'existence d'un élément  $a$  de  $A$  tel que  $2^{1/n+1} = 2^{1/n}a$ , ce qui entraîne que l'élément  $2^{-1/(n(n+1))}$  appartient à  $A$ . Cela conduit à une contradiction, car si tel était le cas,  $(2^{-1/(n(n+1))})^{n(n+1)} = 1/2$  serait entier sur  $\mathbb{Z}$ , ce qui n'est pas. D'où le résultat.

### Exercice 5

Démontrons d'abord le résultat suivant :

**Lemme.** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux  $K$ -algèbres de type fini,  $f : A_1 \rightarrow A_2$  un homomorphisme de  $K$ -algèbres, et  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $A_2$ . Alors,  $f^{-1}(\mathfrak{M})$  est un idéal maximal de  $A_1$ .

Démonstration : La  $K$ -algèbre  $A_2/\mathfrak{M}$  est de type fini sur  $K$  et est un corps. D'après le théorème des zéros de Hilbert,  $A_2/\mathfrak{M}$  est donc de degré fini sur  $K$  (i.e. est de dimension finie sur  $K$ ). Il en résulte que la  $K$ -algèbre  $A/f^{-1}(\mathfrak{M})$  est aussi de degré fini sur  $K$ . Par ailleurs, elle est intègre (car l'image réciproque d'un idéal premier par un homomorphisme d'anneaux est un idéal premier). Cela entraîne que  $A/f^{-1}(\mathfrak{M})$  est un corps, i.e. que  $f^{-1}(\mathfrak{M})$  est un idéal maximal (se convaincre du fait qu'une algèbre intègre de degré fini sur un corps est un corps). D'où le lemme.

1) Considérons un élément non nul  $a$  de  $A$ . Il s'agit de prouver qu'il existe un idéal maximal de  $A$  qui ne contient pas  $a$ . Soit  $L$  le corps des fractions de  $A$  et  $B$  le sous-anneau de  $L$  engendré par  $A$  et  $1/a$ . L'anneau  $B$  est une  $K$ -algèbre de type fini. Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $B$ . D'après le lemme  $\mathfrak{M}' := \mathfrak{M} \cap A$  est un idéal maximal de  $A$ . Par ailleurs,  $a$  étant inversible dans  $B$ ,  $a$  n'appartient pas à  $\mathfrak{M}'$ . D'où l'assertion.

2) Soit  $\mathfrak{P}$  un idéal premier de  $A$ . L'anneau  $A/\mathfrak{P}$  est une  $K$ -algèbre intègre de type fini sur  $K$ . L'assertion 1), appliquée avec l'algèbre  $A/\mathfrak{P}$ , entraîne alors le résultat, compte tenu du fait qu'un idéal maximal de  $A/\mathfrak{P}$  est de la forme  $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$ , où  $\mathfrak{M}$  est un idéal maximal de  $A$  qui contient  $\mathfrak{P}$ .