

Premier Devoir

Exercice 1

Soient K un corps, a et b deux éléments de K et n un entier ≥ 2 . On considère le polynôme

$$F = X^n + aX^{n-1} + b \in K[X].$$

Calculer le discriminant de F .

Exercice 2

Étant donné un nombre premier p , on note \mathbb{F}_p le corps à p éléments.

Soit f un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 5. Soit $D(f)$ son discriminant. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

- a) f est irréductible sur \mathbb{Q} ;
- b) $D(f)$ est un carré dans \mathbb{Z} ;
- c) il existe un nombre premier ℓ , qui ne divise pas $D(f)$, tel que le polynôme de $\mathbb{F}_\ell[X]$ obtenu en réduisant les coefficients de f modulo ℓ , possède exactement deux racines dans \mathbb{F}_ℓ .

Soit $\text{Gal}(f)$ le groupe de Galois de f sur \mathbb{Q} i.e. le groupe de Galois sur \mathbb{Q} du corps de décomposition de f dans \mathbb{C} . On se propose de démontrer l'énoncé suivant :

Proposition. *Le groupe $\text{Gal}(f)$ est isomorphe à A_5 .*

1. Montrer qu'un groupe d'ordre 15 est cyclique (les étudiants n'ayant pas suivi un cours de théorie des groupes pourront admettre ce résultat).
2. Montrer que A_5 n'a pas de sous-groupes d'ordre 15.
3. Montrer que 15 divise l'ordre de $\text{Gal}(f)$.
4. En déduire la proposition.

On pose $f = X^5 + 5X^4 + 2880 \in \mathbb{Z}[X]$.

5. Montrer (sans calculs) que f est irréductible sur \mathbb{Q} .
6. Calculer $D(f)$.

7. Montrer que la condition c) est satisfaite avec $\ell = 11$ et en déduire que $\text{Gal}(f)$ est isomorphe à \mathbb{A}_5 .

Exercice 3

Soit ζ une racine primitive 13-ième de l'unité dans \mathbb{C} . On pose $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. On rappelle que le corps K est une extension galoisienne de \mathbb{Q} de degré 12 (cf. l'exercice 34). On note G le groupe de Galois de K sur \mathbb{Q} .

1. Soit σ l'élément de G défini par l'égalité

$$\sigma(\zeta) = \zeta^2.$$

Montrer que σ est un générateur de G .

Pour tout diviseur positif d de 12, il existe un unique sous-groupe H_d de G d'ordre d (cf. l'exercice 44)).

2. Déterminer les sous-groupes H_d .

On note K_d le sous-corps de K laissé fixe par H_d . On pose

$$\alpha_d = \sum_{\tau \in H_d} \tau(\zeta).$$

3. Quel est le degré de l'extension K_d/\mathbb{Q} ?
4. Montrer que α_d appartient à K_d .
5. Montrer que α_d est un élément primitif de K_d .
6. Rappeler pourquoi K_d est une extension galoisienne de \mathbb{Q} . Expliciter le groupe de Galois de K_d sur \mathbb{Q} en termes de la restriction de σ à K_d .
7. Déterminer le polynôme minimal de α_d sur \mathbb{Q} .
-