

Premier Devoir

Exercice 1

On considère l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , en les indéterminées X et Y . Soient I l'idéal de $\mathbb{C}[X, Y]$ engendré par l'élément $Y^2 - X^3 + X$, et A l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/I$. L'objectif de cet exercice est de prouver que A n'est pas factoriel. On note x (resp. y) la classe de X (resp. de Y) modulo I . On identifie \mathbb{C} et son image dans A .

- 1) Montrer que A est intègre.
- 2) Soit $\mathbb{C}[x]$ le sous-anneau de A engendré par \mathbb{C} et $\{x\}$. Montrer que $\mathbb{C}[x]$ est isomorphe à l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[T]$.
- 3) Soit a un élément de A . Montrer qu'il existe des éléments p et q uniques dans $\mathbb{C}[x]$, tels que l'on ait $a = p + qy$.
- 4) Montrer que l'application σ de A dans A définie par $\sigma(p + qy) = p - qy$, est un automorphisme de A qui fixe les éléments de \mathbb{C} .
- 5) Pour tout a dans A , on pose $N(a) = a\sigma(a)$. Vérifier que $N(a)$ appartient à $\mathbb{C}[x]$, que l'on a $N(1) = 1$, et que le degré de $N(a)$ est différent de 1. Montrer l'égalité $N(ab) = N(a)N(b)$, pour tout a et b dans A .
- 6) Dédurre des questions 2), 3) et 5) que $\mathbb{C} - \{0\}$ est l'ensemble des unités de A .
- 7) Montrer que x , y , $1 - x$ et $1 + x$ sont irréductibles.
- 8) En déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 2

Soient A un anneau, n un entier ≥ 1 , et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n éléments de A . Pour tout indice i , on note A_{f_i} le localisé de A par rapport à la partie multiplicative formée des f_i^n , où n parcourt \mathbb{N} . On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- (i) l'idéal de A engendré par les f_i est égal à A ;
- (ii) pour tout i , l'anneau A_{f_i} est noethérien.

- 1) Soit I un idéal de A . Notons $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$ l'application qui à un élément x de A associe $x/1$, et $\varphi_i(I) \cdot A_{f_i}$ l'idéal de A_{f_i} engendré par $\varphi_i(I)$. Montrer que l'on a l'égalité

$$I = \bigcap_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot A_{f_i}).$$

- 2) En déduire que A est noethérien.

Exercice 3

Soient A un anneau et a un élément de A tels que pour tout idéal maximal \mathfrak{M} de A , l'élément $a/1$ soit simplifiable dans le localisé $A_{\mathfrak{M}}$. Montrer que a est simplifiable dans A .

Exercice 4

Soient A un anneau, M un A -module et f un endomorphisme de M .

- 1) Soit X une indéterminée. Montrer que l'on peut associer à f une structure de $A[X]$ -module sur M en posant, pour tout m dans M , et tout $P = \sum \alpha_i X^i$ dans $A[X]$,

$$P.m = \sum \alpha_i f^{(i)}(m),$$

où $f^{(0)}$ est l'application identique de M , et où si $i \geq 1$, $f^{(i)} : M \rightarrow M$ est l'application i -ème itérée de f .

- 2) Supposons que M soit de type fini sur A et que f soit une surjection de M sur M . Montrer que f est injectif.

Exercice 5

On considère le sous-ensemble M de \mathbb{Z}^3 formé des triplets d'entiers (x, y, z) tels que $x + y + z \equiv 0 \pmod{5}$ et $3x - 2y \equiv 0 \pmod{5}$.

- 1) Montrer que M est un sous- \mathbb{Z} -module libre de type fini de \mathbb{Z}^3 de rang 3.
2) Donner une base de M sur \mathbb{Z} .

Exercice 6

Soit A un anneau local noethérien possédant au moins deux idéaux premiers. Soit \mathfrak{M} l'idéal maximal de A . Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\mathfrak{M}^n \neq \mathfrak{M}^{n+1}$.

Exercice 7

Expliciter un corps à 1849 éléments.