

Deuxième devoir

Exercice 1

Soit A un anneau euclidien. Par définition, A est intègre et il existe une application

$$\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N},$$

ayant la propriété suivante : si x et y sont deux éléments de A , avec $y \neq 0$, il existe q et r dans A tels que l'on ait $x = yq + r$, avec $r = 0$ ou bien $\varphi(r) < \varphi(y)$.

- 1) Soit A^* le groupe des éléments inversibles de A . Montrer qu'il existe un élément x de $A \setminus A^*$, tel que la restriction

$$s : A^* \cup \{0\} \rightarrow A/x.A,$$

de la surjection canonique $A \rightarrow A/x.A$ à $A^* \cup \{0\}$, soit surjective.

- 2) Montrer que l'idéal $x.A$ est maximal.

Soit B le sous-anneau de \mathbb{C} engendré par \mathbb{Z} et par

$$\alpha := \frac{1 + \sqrt{-19}}{2}.$$

- 3) Montrer que les éléments de B sont de la forme $p + q\alpha$ où p et q sont dans \mathbb{Z} .
- 4) Déterminer le groupe des éléments inversibles de B .
- 5) Montrer que B n'est pas euclidien.

L'objectif de la fin de l'exercice est de démontrer que B est principal.

On note N l'application de B dans \mathbb{R} qui à un élément de B associe le carré de son module. Soit I un idéal non nul de B . L'image par N de $I \setminus \{0\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} . Elle possède donc un plus petit élément $N(a)$, où a est dans $I \setminus \{0\}$. On va démontrer que l'on a

$$(1) \quad I = a.B.$$

L'idéal $a.B$ est contenu dans I . Inversement, soit b un élément de I . Il existe deux nombres rationnels λ et μ tels que l'on ait

$$\frac{b}{a} = \lambda + \mu\alpha.$$

Démontrons que l'on a l'inégalité

$$(2) \quad \inf_{n \in \mathbb{Z}} |\mu - n| < \frac{1}{3}.$$

On procède pour cela par l'absurde en supposant que l'on a $\inf_{n \in \mathbb{Z}} |\mu - n| \geq \frac{1}{3}$. On considère la partie entière q de μ et un entier n vérifiant l'inégalité

$$|2\lambda - n| \leq \frac{1}{2}.$$

Posons

$$d = n + (2q + 1)\alpha.$$

6) Montrer que l'on a $2b = ad$.

7) Vérifier que $N(d)$ est impair.

8) Soit \bar{d} le conjugué complexe de d . On pose $d\bar{d} = 2k + 1$. Montrer que $b\bar{d} - ka$ est un élément non nul de I et que l'on a

$$N(b\bar{d} - ka) < N(a).$$

9) En déduire une contradiction et l'inégalité (2).

Il existe $u \in \mathbb{Z}$ et d'après (2) un entier $v \in \mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$|\lambda - u| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\mu - v| \leq \frac{1}{3}.$$

10) Montrer que l'on a $b = a(u + v\alpha)$. En déduire l'égalité (1) et le fait que B soit principal.

Exercice 2

Soient p un nombre premier impair et ζ une racine primitive p -ième de l'unité. On note A l'anneau d'entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$ et B l'anneau d'entiers de son sous-corps réel $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. On rappelle que tout élément de A s'écrit de manière unique sous la forme

$$a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{p-2}\zeta^{p-2},$$

où les a_i sont dans \mathbb{Z} . L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant qui est dû à Kummer :

Proposition. *Tout élément inversible de A est le produit d'une puissance de ζ par un élément inversible de B .*

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un entier algébrique dont tous les conjugués sur \mathbb{Q} sont de module 1. Montrer que α est une racine de l'unité. Montrer sur un exemple que si l'on suppose seulement α algébrique sur \mathbb{Q} , ce résultat est faux en général.

- 2) Montrer que les seules racines de l'unité contenues dans $\mathbb{Q}(\zeta)$ sont les racines $2p$ -ièmes de l'unité (on pourra utiliser le fait que la fonction indicateur d'Euler $n \mapsto \varphi(n)$ tend vers l'infini avec n).
- 3) Montrer que la conjugaison complexe qui à $z \in \mathbb{C}$ associe le conjugué complexe de z induit un automorphisme τ de $\mathbb{Q}(\zeta)$. Déterminer $\tau(\zeta)$.
- 4) Soit \mathfrak{P} l'idéal de A engendré par $1 - \zeta$. Montrer que \mathfrak{P} est un idéal premier de A .
- 5) Soit u un élément inversible de A . On pose

$$\alpha = \frac{u}{\tau(u)}.$$

Montrer qu'il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait $\alpha = \pm \zeta^a$.

- 6) En considérant les images de u et $\tau(u)$ par la surjection canonique $A \rightarrow A/\mathfrak{P}$, montrer que l'on a en fait $\alpha = \zeta^a$.
- 7) En déduire la proposition.

Exercice 3

Soient A un anneau, n un entier ≥ 1 , et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n éléments de A . Pour tout indice i , on note A_{f_i} le localisé de A par rapport à la partie multiplicative formée des f_i^n , où n parcourt \mathbb{N} . On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- (i) l'idéal de A engendré par les f_i est égal à A ;
 - (ii) pour tout i , l'anneau A_{f_i} est noethérien.
- 1) Soit I un idéal de A . Notons $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$ l'application qui à un élément x de A associe $x/1$, et $\varphi_i(I).A_{f_i}$ l'idéal de A_{f_i} engendré par $\varphi_i(I)$. Montrer que l'on a l'égalité

$$I = \bigcap_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I).A_{f_i}).$$

- 2) En déduire que A est noethérien.

Exercice 4

Soient K un corps et X une indéterminée. Soit I l'idéal de l'anneau $K[X^2, X^3]$ engendré par X^4 . On pose

$$A = K[X^2, X^3]/I.$$

- 1) Montrer que A est noethérien.
- 2) Déterminer l'ensemble des idéaux premiers de A .
- 3) En déduire la dimension de Krull de A .