

## Premier Devoir

### Exercice 1

On note  $A$  l'anneau  $\mathbb{C}[X, Y, Z]$  des polynômes en trois indéterminées  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $I = (X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3)$  l'idéal de  $A$  engendré par  $X^2 - Y^3$  et  $Y^2 - Z^3$ .

- 1) Pour tout  $P$  dans  $A$ , montrer qu'il existe des éléments  $P_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) de l'anneau  $\mathbb{C}[Z]$  tels que  $P - (P_1XY + P_2X + P_3Y + P_4)$  appartienne à  $I$ .
- 2) Soient  $T$  une indéterminée et  $\varphi$  l'homomorphisme d'anneaux de  $A$  dans  $\mathbb{C}[T]$  défini par les conditions :

$$\varphi(a) = a \quad \text{si} \quad a \in \mathbb{C}, \quad \varphi(X) = T^9, \quad \varphi(Y) = T^6, \quad \varphi(Z) = T^4.$$

Montrer que  $I$  est le noyau de  $\varphi$  et en déduire que  $I$  est un idéal premier de  $A$ .

- 3) Montrer que le corps des fractions de  $A/I$  est isomorphe au corps des fractions rationnelles  $\mathbb{C}(T)$ .

### Exercice 2

Soit  $A$  un anneau euclidien. Par définition,  $A$  est intègre et il existe une application

$$\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N},$$

ayant la propriété suivante : si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $A$ , avec  $y \neq 0$ , il existe  $q$  et  $r$  dans  $A$  tels que l'on ait  $x = yq + r$ , avec  $r = 0$  ou bien  $\varphi(r) < \varphi(y)$ .

- 1) Soit  $A^*$  le groupe des éléments inversibles de  $A$ . Montrer qu'il existe un élément  $x$  de  $A \setminus A^*$ , tel que la restriction

$$s : A^* \cup \{0\} \rightarrow A/x.A,$$

de la surjection canonique  $A \rightarrow A/x.A$  à  $A^* \cup \{0\}$ , soit surjective.

- 2) Montrer que l'idéal  $x.A$  est maximal.

Soit  $B$  le sous-anneau de  $\mathbb{C}$  engendré par  $\mathbb{Z}$  et par

$$\alpha := \frac{1 + \sqrt{-19}}{2}.$$

- 3) Montrer que les éléments de  $B$  sont de la forme  $p + q\alpha$  où  $p$  et  $q$  sont dans  $\mathbb{Z}$ .
- 4) Déterminer le groupe des éléments inversibles de  $B$ .
- 5) Montrer que  $B$  n'est pas euclidien.

L'objectif de la fin de l'exercice est de démontrer que  $B$  est principal.

On note  $N$  l'application de  $B$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un élément de  $B$  associe le carré de son module. Soit  $I$  un idéal non nul de  $B$ . L'image par  $N$  de  $I \setminus \{0\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Elle possède donc un plus petit élément  $N(a)$ , où  $a$  est dans  $I \setminus \{0\}$ . On va démontrer que l'on a

$$(1) \quad I = a.B.$$

L'idéal  $a.B$  est contenu dans  $I$ . Inversement, soit  $b$  un élément de  $I$ . Il existe deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que l'on ait

$$\frac{b}{a} = \lambda + \mu\alpha.$$

- 6) (Difficile) Montrer que l'on a l'inégalité

$$(2) \quad \inf_{n \in \mathbb{Z}} |\mu - n| \leq \frac{1}{3}.$$

On déduit de (2) l'existence de deux entiers  $p$  et  $q$  tels que l'on ait

$$|\lambda - p| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\mu - q| \leq \frac{1}{3}.$$

On pose  $c = p + q\alpha$ .

- 7) Montrer que l'on a  $b = ac$ . En déduire l'égalité (1) et le fait que  $B$  soit principal.

### Exercice 3

Soient  $I_1$  et  $I_2$  deux ensembles. Posons

$$S = \left( \{1\} \times I_1 \right) \cup \left( \{2\} \times I_2 \right).$$

L'ensemble  $S$  est appelé la *somme disjointe* de  $I_1$  et  $I_2$ .

Soit  $A$  un anneau. Étant donné un ensemble  $I$ , rappelons que l'on désigne par  $A^{(I)}$  le  $A$ -module libre de base  $I$ .

- 1) Montrer que les  $A$ -modules  $A^{(I_1)} \times A^{(I_2)}$  et  $A^{(S)}$  sont isomorphes.
- 2) En déduire que les  $A$ -modules  $A^{(\mathbb{N})} \times A^{(\mathbb{N})}$  et  $A^{(\mathbb{N})}$  sont isomorphes.

### Exercice 4

Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Par définition, une partie  $T$  de  $M$  est un système générateur minimal de  $M$  si  $T$  est un système générateur de  $M$ , et si pour toute partie  $T'$  de  $T$ , qui est distincte de  $T$ ,  $T'$  n'est pas un système générateur de  $M$ .

- 1) Donner un exemple de module ayant deux systèmes générateurs minimaux qui ne sont pas équipotents.

On suppose que  $A$  est un anneau local et que  $M$  est de type fini sur  $A$ . Soit  $I$  l'idéal maximal de  $A$ . L'ensemble  $M/IM$  est un  $A/I$ -espace vectoriel de dimension finie (à justifier). On note  $n$  sa dimension.

- 2) Soit  $(u_i + IM)_{1 \leq i \leq n}$  une  $A/I$ -base de  $M/IM$ . Montrer que la famille  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système générateur minimal de  $M$ .
- 3) Montrer qu'un système générateur minimal de  $M$  a exactement  $n$  éléments.
- 4) Soient  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$  deux systèmes générateurs minimaux de  $M$ . Pour tout  $j$  compris entre 1 et  $n$ , il existe des éléments  $a_{ij}$  de  $A$  tels que l'on ait

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i.$$

Montrer que la matrice de taille  $(n, n)$  dont l'élément de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne est  $a_{ij}$ , est inversible.

---