

## Correction du deuxième Devoir

### Problème

1) Tout élément de  $\mathbb{C}^n$  est racine du polynôme nul, d'où  $V(\{0\}) = \mathbb{C}^n$ , et aucun n'est racine du polynôme  $1 \in A$ , d'où  $V(A) = \emptyset$ .

Soit  $x$  un élément de  $V(II')$ . Supposons que  $x$  ne soit pas dans  $V(I)$ . Il existe alors  $P \in I$  tel que  $P(x) \neq 0$ . Si  $Q$  est dans  $I'$ , l'élément  $PQ$  est dans  $II'$ , donc on a  $(PQ)(x) = 0$ , ce qui entraîne  $Q(x) = 0$ . Ainsi  $x$  est dans  $V(I')$  et  $V(II')$  est contenu dans  $V(I) \cup V(I')$ . Inversement,  $II'$  est contenu dans  $I$  et  $I'$ , donc  $V(I)$  et  $V(I')$  sont inclus dans  $V(II')$  (cf. par exemple la question 4)).

Chacun des  $I_\alpha$  est contenu dans l'idéal engendré par la réunion des  $I_\alpha$  i.e. dans  $\sum I_\alpha$ , donc on a  $V(\sum I_\alpha) \subseteq \bigcap V(I_\alpha)$ . Inversement, soit  $x$  un élément de  $\bigcap V(I_\alpha)$ . Un élément  $F$  de  $\sum I_\alpha$  est une somme finie d'éléments appartenant à des idéaux  $I_\alpha$ , donc  $F(x) = 0$ , d'où  $x \in V(\sum I_\alpha)$  et l'égalité demandée.

Toute réunion finie et toute intersection de parties algébriques de  $\mathbb{C}^n$  sont des parties algébriques. Par ailleurs, l'ensemble vide et  $\mathbb{C}^n$  sont des parties algébriques. Cela montre notre assertion.

2) Soit  $f$  un élément de  $A$ . Pour tout  $x$  dans l'ensemble vide, on a  $f(x) = 0$ , donc  $f$  appartient à  $\mathfrak{I}(\emptyset)$ , d'où  $\mathfrak{I}(\emptyset) = A$ .

En ce qui concerne la deuxième égalité, on procède par récurrence sur  $n$ . Un polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X_1]$  n'ayant qu'un nombre fini de racines, et  $\mathbb{C}$  étant infini, l'égalité est vraie si  $n = 1$ . Considérons un entier  $n \geq 2$  et supposons  $\mathfrak{I}(\mathbb{C}^{n-1}) = \{0\}$ . Soit  $F$  un polynôme non nul de  $A$ . Il s'agit de montrer que  $F$  n'est pas dans  $\mathfrak{I}(\mathbb{C}^n)$ , autrement dit qu'il existe  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $F(x) \neq 0$ . Il existe un entier  $r \geq 0$  et des éléments  $F_i(X_1, \dots, X_{n-1})$  de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$  tels que l'on ait  $F_r(X_1, \dots, X_{n-1}) \neq 0$  et que

$$F = \sum_{i=0}^r F_i(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^i.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un élément  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $F_r((x_1, \dots, x_{n-1})) \neq 0$ . Le polynôme  $F(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n) \in \mathbb{C}[X_n]$  n'est pas nul et n'a donc qu'un nombre fini de racines. Il existe ainsi  $x_n \in \mathbb{C}$  tel que  $F((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) \neq 0$ . D'où notre assertion.

3) Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un élément de  $\mathbb{C}^n$ . D'après la question 1), il suffit de démontrer que le singleton  $\{a\}$  est une partie algébrique. On vérifie pour cela que si  $\mathfrak{M}$  est l'idéal

$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ , on a  $V(\mathfrak{M}) = \{a\}$ . En effet, on constate d'abord que  $\{a\}$  est contenu dans  $V(\mathfrak{M})$ . Inversement, si  $b = (b_1, \dots, b_n) \in V(\mathfrak{M})$ , on a  $b_i - a_i = 0$  pour tout  $i$ , d'où  $a = b$  et l'assertion.

4) Soit  $P$  un élément de  $\mathfrak{J}(Z')$ . On a  $P(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $Z'$  donc aussi pour tout  $x$  dans  $Z$ , d'où  $P \in \mathfrak{J}(Z)$ . Si  $x$  est dans  $V(I')$ , on a  $P(x) = 0$  pour tout  $P$  dans  $I'$ , donc aussi pour tout  $P$  dans  $I$ , d'où  $x \in V(I)$ .

5) Soit  $x$  un élément de  $Z$ . Pour tout  $P \in \mathfrak{J}(Z)$ , on a  $P(x) = 0$ , donc  $x \in V(\mathfrak{J}(Z))$ . Si  $P$  est un élément de  $I$ , pour tout  $x \in V(I)$  on a  $P(x) = 0$ , d'où  $P \in \mathfrak{J}(V(I))$ .

6) Soit  $P$  un élément de la racine de  $\mathfrak{J}(Z)$ . Il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $P^n$  appartienne à  $\mathfrak{J}(Z)$ . Si  $x$  est dans  $Z$ , on a donc  $P(x)^n = 0$ , d'où  $P(x) = 0$  et  $P$  appartient à  $\mathfrak{J}(Z)$ . Inversement,  $\mathfrak{J}(Z)$  est contenu dans  $\sqrt{\mathfrak{J}(Z)}$ , d'où l'égalité  $\sqrt{\mathfrak{J}(Z)} = \mathfrak{J}(Z)$ . Par ailleurs,  $I$  étant contenu dans  $\mathfrak{J}(V(I))$ ,  $\sqrt{I}$  est inclus dans  $\sqrt{\mathfrak{J}(V(I))}$  i.e. dans  $\mathfrak{J}(V(I))$ .

7) D'après la question 5), appliquée avec  $Z = V(I)$ , on constate que  $V(I)$  est contenu dans  $V(\mathfrak{J}(V(I)))$ . Par ailleurs, les questions 4) et 5) entraînent que l'on a l'inclusion  $V(\mathfrak{J}(V(I))) \subseteq V(I)$ . D'où l'égalité demandée.

8) Soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal contenant  $I$ . Il existe un élément  $a = (a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ . Pour tout  $P$  dans  $\mathfrak{M}$ , on a  $P(a) = 0$ . Pour tout  $P$  dans  $I$  on a donc  $P(a) = 0$ , ainsi  $a$  appartient à  $V(I)$ , ce qui entraîne l'assertion.

9) Supposons qu'il existe un élément  $(x_1, \dots, x_n, t)$  dans  $V(J)$ . On a l'égalité

$$P((x_1, \dots, x_n))t = 1.$$

L'élément  $(x_1, \dots, x_n)$  appartient à  $V(I)$  de sorte que l'on a  $P((x_1, \dots, x_n)) = 0$ , ce qui conduit à une contradiction et prouve que  $V(J)$  est vide.

Il résulte alors de la question 8) que l'on a  $J = B$ . Soit  $(F_1, \dots, F_s)$  un système générateur de  $I$  dans  $A$ . Il existe des éléments  $R_i$  et  $R$  dans  $B$  tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^s R_i F_i + R(1 - TP) = 1.$$

On pose  $Y = 1/T$ . Il existe un entier  $N \geq 1$ , des éléments  $C_i$  et  $D$  de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y]$  tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^s C_i F_i + D(Y - P) = Y^N.$$

En substituant  $Y$  par  $P$  on constate alors que  $P^N$  appartient à  $I$ , i.e. que  $P$  est dans  $\sqrt{I}$ . Ainsi  $\mathfrak{J}(V(I))$  est contenu dans  $\sqrt{I}$ . Le fait que  $\sqrt{I}$  soit contenu dans  $\mathfrak{J}(V(I))$  a été démontré dans la question 6). D'où le résultat.

10) D'après la question 6) l'application  $Z \mapsto \mathfrak{J}(Z)$  envisagée est bien définie. Vérifions que les deux applications considérées sont réciproques l'une de l'autre. D'après la question 9), si  $I$  est un idéal égal à sa racine, on a  $\mathfrak{J}(V(I)) = I$ . Par ailleurs, si  $Z = V(I)$  est une

partie algébrique de  $\mathbb{C}^n$ , on a d'après la question 7),  $V(\mathfrak{I}(Z)) = Z$ . Cela prouve notre assertion.

11) Posons  $Z = V(I)$ . On a l'inclusion  $\mathfrak{I}(Z \cup \{x\}) \subseteq \mathfrak{I}(Z)$ . Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\mathfrak{I}(Z) \neq \mathfrak{I}(Z \cup \{x\}).$$

Supposons pour cela que l'on ait  $\mathfrak{I}(Z) = \mathfrak{I}(Z \cup \{x\})$ . D'après la question 7), on a alors

$$Z = V(\mathfrak{I}(Z \cup \{x\})).$$

D'après la question 5)  $x$  est ainsi dans  $Z$ , ce qui contredit l'hypothèse faite. D'où le résultat.

12) Pour tout indice  $i$ , posons  $Z_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \setminus \{\alpha_i\}$ . Puisque  $Z_i$  est fini,  $Z_i$  est une partie algébrique de  $\mathbb{C}^n$  (question 3)). La question 11) entraîne alors l'assertion.

13) Supposons que  $A/I$  soit un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $d$ . Considérons une famille  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$  de  $r$  points de  $V(I)$ . Montrons que l'on a

$$(1) \quad r \leq d,$$

ce qui prouvera le fait que  $V(I)$  est fini de cardinal plus petit que  $d$ . D'après 12), il existe une famille  $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$  d'éléments de  $A$  tels que l'on ait

$$(2) \quad F_i(\alpha_i) = 1 \quad \text{et} \quad F_i(\alpha_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Notons  $\overline{F_i}$  la classe de  $F_i$  modulo  $I$  et vérifions que la famille  $(\overline{F_i})_{1 \leq i \leq r}$  est libre dans le  $\mathbb{C}$ -espace  $A/I$ , ce qui entraînera l'inégalité (1). Considérons pour cela des nombres complexes  $\lambda_i$  tels que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \overline{F_i} = 0.$$

L'élément  $F = \sum \lambda_i F_i$  appartient à  $I$ , donc pour tout indice  $j$  entre 1 et  $r$ , on a  $F(\alpha_j) = 0$ . Par ailleurs, on a  $F(\alpha_j) = \lambda_j$  (cf. (2)), d'où  $\lambda_j = 0$  et le résultat.

Inversement, supposons que  $V(I)$  soit un ensemble fini égal à  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ . Pour tout  $i$  entre 1 et  $r$ , posons  $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{C}^n$ . Pour tout  $j$  entre 1 et  $n$ , considérons le polynôme de  $\mathbb{C}[X_j]$

$$F_j = \prod_{i=1}^r (X_j - \alpha_{i,j}).$$

Par définition,  $F_j$  appartient à  $\mathfrak{I}(V(I))$ . D'après la question 9), il existe donc un entier  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $j$  entre 1 et  $n$ ,  $F_j^N$  soit dans  $I$ . On déduit de là que  $\overline{X_j}^{rN}$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{C}$  des monômes  $\overline{X_j}^k$  pour  $k$  compris entre 0 et  $rN - 1$ . Il en résulte que l'ensemble des éléments de la forme

$$\prod_{i=1}^n \overline{X_i}^{m_i},$$

où  $0 \leq m_i \leq rN - 1$ , est un système générateur du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $A/I$ , ce qui prouve que  $A/I$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ .

14) Soit  $I$  l'idéal de  $\mathbb{R}[X_1, X_2]$  engendré par  $X_1^2 + X_2^2$ . On a  $V(I) = \{(0, 0)\}$  et la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}[X_1, X_2]/I$  est infinie car la famille  $(X_1^n + I)_{n \geq 1}$  est libre (le vérifier en exercice).

### Exercice

Supposons que  $M$  soit injectif. Soit  $P$  un  $A$ -module contenant  $M$ . Il existe un homomorphisme  $f : P \rightarrow M$  qui prolonge l'application identique sur  $M$ , i.e. dont la restriction à  $M$  est l'application identique de  $M$ . On a alors

$$(1) \quad P = M \oplus \ker(f).$$

En effet, pour tout  $x \in P$ , on a  $f \circ f(x) = f(x)$ , i.e. on a  $f \circ f = f$ . Il en résulte que l'on a  $P = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$ . Cela entraîne l'égalité (1) car  $\text{Im}(f) = M$ . D'où l'assertion (ii).

Inversement, supposons l'assertion (ii) satisfaite. Soient  $Y$  un  $A$ -module,  $X$  un sous-module de  $Y$  et  $f : X \rightarrow M$  un homomorphisme de  $A$ -modules. Il s'agit de démontrer l'existence d'un homomorphisme  $g : Y \rightarrow M$  qui prolonge  $f$ . On considère pour cela le sous-module  $T$  de  $M \times Y$  formé des éléments de la forme  $(f(x), -x)$  où  $x$  est dans  $X$ . On pose

$$P = (M \times Y)/T.$$

On note  $\pi : M \times Y \rightarrow P$  la surjection canonique et  $j : M \rightarrow P$  l'homomorphisme défini pour tout  $m \in M$  par l'égalité

$$j(m) = \pi((m, 0)).$$

L'homomorphisme  $j$  est injectif. En effet, soit  $m \in M$  tel que  $\pi((m, 0)) = 0$ . L'élément  $(m, 0)$  est dans  $T$ , i.e. il existe  $x \in X$  tel que  $(m, 0) = (f(x), -x)$ , d'où  $x = 0$  puis  $m = 0$ . Posons alors  $M' = j(M)$  :  $M'$  est un sous-module de  $P$  isomorphe à  $M$ , et il résulte de l'hypothèse faite que  $M'$  est facteur direct de tout module le contenant. Il existe ainsi un sous-module  $Q$  de  $P$  tel que l'on ait  $P = M' \oplus Q$ . Notons  $p' : P \rightarrow M'$  l'homomorphisme donné par la première projection sur  $M'$ . Soit  $p : P \rightarrow M$  l'homomorphisme composé  $j^{-1} \circ p'$  ( $j$  induit un isomorphisme de  $M$  sur  $M'$  et  $j^{-1}$  est ici l'application réciproque de  $j$  définie sur  $M'$  à valeurs dans  $M$ ). Soit alors  $g : Y \rightarrow M$  l'application définie pour tout  $y \in Y$  par l'égalité

$$g(y) = p \circ \pi((0, y)).$$

Cette application est un homomorphisme qui prolonge  $f$ . En effet, soit  $x$  un élément de  $X$ . On a  $g(x) = p \circ \pi((0, x))$ . Par ailleurs, on a  $(0, x) = (f(x), 0) + (f(-x), x)$ , d'où  $\pi((0, x)) = \pi((f(x), 0))$ . On a ainsi les égalités

$$g(x) = p \circ j(f(x)) = j^{-1} \circ p' \circ j(f(x)).$$

Puisque  $j(f(x))$  appartient à  $M'$ , on a  $p' \circ j(f(x)) = j(f(x))$ , d'où  $g(x) = f(x)$  et le résultat.