

Deuxième Devoir

Problème

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n indéterminées et A l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On rappelle que si \mathfrak{M} est un idéal maximal de A , il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

Si I est un idéal de A , on note $V(I)$ le sous-ensemble de \mathbb{C}^n formé des éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que pour tout $P \in I$ l'on ait $P(x) = 0$. Si Z est une partie de \mathbb{C}^n , on note $\mathfrak{I}(Z)$ le sous-ensemble de A formé des éléments P tels que pour tout $x \in Z$ l'on ait $P(x) = 0$; c'est un idéal de A . On dit qu'une partie de \mathbb{C}^n est *algébrique* si elle est de la forme $V(I)$ pour un idéal I de A .

Soient Z, Z' deux parties de \mathbb{C}^n et I, I' deux idéaux de A .

- 1) Montrer que l'on a les égalités

$$V(\{0\}) = \mathbb{C}^n, \quad V(A) = \emptyset, \quad V(I) \cup V(I') = V(II'),$$

et que si $(I_\alpha)_\alpha$ est une famille d'idéaux de A , on a

$$V\left(\sum I_\alpha\right) = \bigcap V(I_\alpha).$$

En déduire que les parties algébriques de \mathbb{C}^n sont les parties fermées d'une topologie sur \mathbb{C}^n , que l'on appelle la topologie de Zariski.

- 2) Montrer que $\mathfrak{I}(\emptyset) = A$ et que $\mathfrak{I}(\mathbb{C}^n) = \{0\}$.
- 3) Montrer que les parties finies de \mathbb{C}^n sont algébriques.
- 4) Montrer que si $Z \subseteq Z'$, on a $\mathfrak{I}(Z') \subseteq \mathfrak{I}(Z)$, et que si $I \subseteq I'$, on a $V(I') \subseteq V(I)$.
- 5) Montrer que l'on a les inclusions $Z \subseteq V(\mathfrak{I}(Z))$ et $I \subseteq \mathfrak{I}(V(I))$.
- 6) Montrer que $\mathfrak{I}(Z)$ est un idéal de A égal à sa racine. En déduire que l'on a l'inclusion $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{I}(V(I))$.
- 7) Montrer que l'on a $V(\mathfrak{I}(V(I))) = V(I)$.
- 8) Si I est distinct de A , montrer que $V(I)$ n'est pas vide.
- 9) Soient P un élément de $\mathfrak{I}(V(I))$ et T une indéterminée. On note $B = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, T]$ et J l'idéal de B engendré par I et par $1 - P(X_1, \dots, X_n)T$. Montrer que la partie $V(J)$ de \mathbb{C}^{n+1} est vide. En déduire que P appartient à \sqrt{I} et que l'on a

$$\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

- 10) Montrer que les applications $Z \mapsto \mathfrak{I}(Z)$ et $I \mapsto V(I)$ définissent deux bijections réciproques l'une de l'autre entre les parties algébriques de \mathbb{C}^n et les idéaux de A égaux à leur racine.
- 11) Soit x un élément de $\mathbb{C}^n \setminus V(I)$. Montrer qu'il existe $F \in A$ tel que

$$F(x) = 1 \quad \text{et} \quad F(y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in V(I).$$

- 12) Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un ensemble fini de points distincts de \mathbb{C}^n . Montrer qu'il existe une famille d'éléments $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$ de A tels que l'on ait

$$F_i(\alpha_i) = 1 \quad \text{et} \quad F_i(\alpha_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

- 13) En déduire que A/I est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie si et seulement si l'ensemble $V(I)$ est fini. Si tel est le cas, on prouvera que le cardinal de $V(I)$ est inférieur à la dimension sur \mathbb{C} de A/I .
- 14) Montrer que l'assertion 13) est fausse si l'on remplace \mathbb{C} par le corps des nombres réels.

Exercice

Soient A un anneau et M un A -module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est un A -module injectif ;
- (ii) M est facteur direct de tout module le contenant.