

## Deuxième Devoir

### Exercice 1

Soit  $A$  un anneau artinien local. On note  $\mathfrak{M}$  l'idéal maximal de  $A$  et  $k$  le corps  $A/\mathfrak{M}$ . On rappelle que le nilradical d'un anneau artinien est nilpotent.

- 1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  - (i) les idéaux de  $A$  sont principaux ;
  - (ii) l'idéal  $\mathfrak{M}$  est principal ;
  - (iii) la dimension du  $k$ -espace vectoriel  $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$  est inférieure ou égale à 1.
- 2) Donner deux exemples d'anneaux artiniens locaux qui satisfont aux conditions ci-dessus.
- 3) Soient  $K$  un corps,  $X$  une indéterminée et  $A$  l'anneau  $K[X^2, X^3]/(X^4)$ . Montrer que  $A$  est un anneau artinien local qui ne satisfait pas aux conditions ci-dessus.

### Exercice 2

Soit  $A$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . Rappelons qu'un idéal fractionnaire de  $A$  est un sous- $A$ -module  $I$  de  $K$ , pour lequel il existe un élément non nul  $d$  de  $A$  tel que  $dI$  soit contenu dans  $A$ . On note  $\text{Id}(A)$  l'ensemble des idéaux fractionnaires non nuls de  $A$ . Un élément  $I$  de  $\text{Id}(A)$  est dit inversible s'il existe  $J$  dans  $\text{Id}(A)$  tel que  $IJ = A$ .

- 1) Soit  $f$  un homomorphisme de  $A$ -modules de  $I$  dans  $A$ . Montrer qu'il existe un élément  $x$  de  $K$  tel que, pour tout  $\lambda$  dans  $I$ , l'on ait  $f(\lambda) = \lambda x$ .
- 2) (\*) Soit  $I$  un élément de  $\text{Id}(A)$ . Montrer que si  $I$  est un  $A$ -module projectif, alors  $I$  est inversible (l'implication réciproque de cette assertion a été démontrée en T.D.).

### Exercice 3

Soit  $A$  un anneau local noethérien. On note  $\mathfrak{M}$  l'idéal maximal de  $A$  et  $k$  le corps  $A/\mathfrak{M}$ . Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules de type fini tels que  $N$  soit libre sur  $A$ . Soit  $f : M \rightarrow N$  un homomorphisme de  $A$ -modules tels que l'homomorphisme de  $A$ -modules

$$f \otimes \text{Id}_k : M \otimes_A k \rightarrow N \otimes_A k,$$

soit un isomorphisme de  $M \otimes_A k$  sur  $N \otimes_A k$ .

Rappelons que si  $E$  et  $F$  sont deux modules de type fini sur un anneau local  $B$  tels que  $E \otimes_B F = 0$ , alors  $E$  ou  $F$  est nul.

1) Montrer que l'on a  $(N/f(M)) \otimes_A k = 0$ . En déduire que  $f$  est une surjection de  $M$  sur  $N$ .

2) En utilisant le fait que le noyau de  $f$  est un facteur direct de  $M$  (ce que l'on justifiera), montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $M$  sur  $N$ .

#### **Exercice 4**

Soit  $A$  le sous-anneau de  $\mathbb{C}$  formé des éléments qui sont entiers sur  $\mathbb{Z}$ . Montrer que  $A$  n'est pas un anneau noethérien.

#### **Exercice 5**

Soient  $K$  un corps et  $A$  une  $K$ -algèbre de type fini.

1) Si  $A$  est intègre, montrer que  $\{0\}$  est l'intersection des idéaux maximaux de  $A$ .

2) En déduire que tout idéal premier de  $A$  est intersection d'idéaux maximaux.

---